А.В. Боровский

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Часть 1
Механика (статика, кинематика, динамика)

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

А.В. Боровский

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Часть 1
Механика (статика, кинематика, динамика)

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУ
2019

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я7
Б83

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Пархомов
канд. физ.-мат. наук, доц. Т.И. Белых

Боровский А.В.
Б83 Общая физика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.В. Боровский. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2019. – Ч. 1 : Механика (статика, кинематика, динамика). – 110 с. – Режим доступа: http://lib-catalog.bgu.ru.

В учебном пособии рассмотрены следующие темы: введение в механику, три закона Ньютона, бросание материальных тел, закон всемирного тяготения, вращение точки по окружности, первый закон статики, равновесие тела, закрепленного на оси, работа и энергия, закон динамики вращательного движения, неинерциальные системы отсчета, реактивное движение, колебательное движение. Также пособие содержит три математических приложения. Каждая глава завершается показательным решением физических задач. Издание проиллюстрировано рисунками, что делает изложение более наглядным для обучающихся.

Для студентов подготовки бакалавриата, обучающихся по экономическим специальностям.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Человек на планете Земля занимается различными видами деятельности, которых насчитывается многие сотни. Крестьянин возделывает землю и выращивает урожай. Кузнец выковывает металлические изделия. Гончар делает глиняную посуду. Ткач производит ткани, из которых портной шьет одежду. Строитель строит дома для проживания людей и другие сооружения для различных нужд. Воин охраняет свой народ от внешнего врага. Писатель пишет книги, художник рисует картины и т.д. Есть в нашем обществе особая сфера деятельности, которая называется «наука». Большинство достижений современной цивилизации, которые нас окружают, созданы на основе знаний, добытых учеными, являющимися работниками науки.

Так что же такое наука? Когда возникла и чем занимается? Физика является разделом науки, поэтому начнем разбираться с обсуждения указанных вопросов.

Примерно до XVI в. науки, как отдельной сферы деятельности человека не существовало. Царила натуральная философия, которая с религиозной точки зрения объединяла все знания средневекового человека об окружающем его мире. Основным догматом средневековой философии являлся тезис о возможности получения знания о том или ином явлении посредством религиозного откровения и последующей дискуссии. Первым было слово. Однако, практическая деятельность людей противоречила этому тезису. Многие исследователи уже тогда понимали, что знания приходят в результате обширной практики. Например, переход к массовому производству стекла в XV в. привел в начале XVI в. к созданию первых оптических элементов – линз. Потребности мореплавания и военного дела привели в это же время к появлению подзорной трубы. Вслед за этим в 1609 г. Галилео Галилей создал первый широкоформатный телескоп, который использовал для изучения звездного неба. Само слово телескоп придумал Галилей. Довольно быстро вслед за этим событием произошла смена картины мироздания. Вместо геоцентрической концепции мироздания Аристотеля и Птолемея возникла гелиоцентрическая картина мира Коперника и Галилея. В центре располагалось солнце. Вокруг него по эллиптическим орбитам двигались планеты, включая нашу Землю. Гелиоцентрическая картина мира была открыта в результате развития оптики и астрономии после изобретения телескопа.

Другой пример, в начале XV в. была изобретена сталь. В жидкое железо начали добавлять метеоритные камни. Сталь отличается прочностью и упругостью по сравнению с мягким железом или хрупким чугуном. Именно после открытия стали началось развитие артиллерии и огнестрельного оружия. Стальные топор, плуг и лопата привели к развитию земледелия в лесной полосе на твердых почвах. Стальной крепежный элемент и инструменты привели к бурному развитию мореплавания и строительства. Стальные подковы позволили лошадям перемещаться на тысячи километров. Почему Россия занимает такую огромную территорию? Существует гипотеза, что сталь была изобретена средневековыми металлургами на территории России. Страна сразу получила преимущества в холодном и огнестрельном оружии и в орудиях труда. В результате русскими людьми были освоены гигантские территории на Севере, в Сибири и на Дальнем Востоке. Все эти героические дела происходили без философских диспутов.

Таким образом, наука как сфера человеческой деятельности выделилась из натуральной философии в XVI в. и уже на протяжении 500 лет существует самостоятельно.

Характерные признаки научной деятельности *следующие:*

1. Наука изучает только многократно повторяющиеся явления, которые могут носить природный, технический или гуманитарный характер. В связи с этим все науки делят на естественные, технические и гуманитарные.

2. Наука использует «научный метод» в исследованиях. Ученый проводит целенаправленные экспериментальные исследования изучаемого явления, многократно повторяя это явление в лаборатории или многократно наблюдая за ним в природе, или собирая статистические данные в гуманитарной сфере. Второй частью научного метода является параллельная разработка теории, при помощи которой описывается данное явление.

3. Наука использует специальный язык для описания изучаемых явлений. Таким языком является математика.

4. Наука использует принцип многократного подтверждения установленных результатов различными научными школами (лабораториями, институтами, отдельными учеными).

5. Наука изучает только новые явления или продолжает изучать недостаточно изученные. Таким образом, обязательным считается элемент новизны в научных исследованиях.

Математика зародилась в первых древних государствах в связи с практическими потребностями. Правителю нужно было пересчитать подданных, количество собранной дани, число воинов в войске. Эти задачи решала арифметика. Нужно было делить землю на наделы, строить здания и сооружения – эти задачи решала геометрия. Для осуществления планомерного земледелия и другой деятельности нужен был подсчет времени. Кто-то из способных правителей или жрецов развил астрономические наблюдения, на базе которых придумали календарь. У людей средневековья постоянно возникали задачи на движение, из области торговли, на производительность труда. Для их эффективного решения придумали алгебру. Для решения задач механики были разработаны дифференциальное и интегральное исчисление и дифференциальные уравнения. Таким образом, каждый раз практическая потребность вызывала развитие того или иного раздела математики.

Признаки научной деятельности (1–5) можно привлекать для установления видов деятельности, не имеющих отношения к науке. Наиболее простым примером является религия. Религиозная деятельность не удовлетворяет ни одному из критериев (1–5). Философия также не является наукой в понимании критериев (1–5). Достаточно вспомнить, что наука отделилась от философии еще 500 лет назад. Однако, философия является полезным видом деятельности человека, так как обсуждает вопросы мировоззрения, бытия и сознания человека. Не относятся к научной сфере литература, живопись, скульптура, музыка, пение и другие виды художественной деятельности человека. Сложнее с такими видами деятельности как экономика, юриспруденция, история, лингвистика. Эти сферы содержат практическую и научную составляющую. Практическая составляющая как правило содержит изучение законодательства, практические рекомендации различных специалистов, историю деятельности ассоциаций и объединений и т.д. Научная составляющая содержит экономико-математические методы, социологию общества и общественного сознания, историческую хронологию, математико-лингвистические модели, на основе которых разработаны многочисленные компьютерные программы для работы с текстами и различными языками.

Наука в широком понимании к настоящему времени разделилась на три большие сферы – естественные, технические и гуманитарные науки. Каждая из которых делится на крупные разделы. Физика является одним из разделов сферы естественных наук.

Дадим здесь следующие определения:

Физика *– это раздел естественных наук, который количественно описывает различные явления природы.*

Природа *– это окружающий нас материальный мир*.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ

Современная физика также делится на многочисленные разделы, к числу которых относятся, например, механика, термодинамика, электричество и магнетизм, оптика, атомная физика, физика элементарных частиц и т.д. Причем, с течением времени количество разделов физики увеличивается. Начнем рассмотрение с изложения механики. Дадим определение:

Механика *– это наука о движении физических тел в пространстве и времени относительно других тел, а также о причинах, вызывающих это движение.*

Механика возникла в XVI в. Вклад в этот раздел физики внесли Декарт, Галилей, Кеплер, Ньютон, Лагранж, Гамильтон, Якоби, Неттер и другие ученые. Потребность в развитии механики была вызвана перевозками людей и грузов, строительным делом, развитием военного дела, исследованиями в области астрономии, созданием машин и механизмов.

Физическое тело *– это фиксированная совокупность мельчайших частиц вещества (атомов и молекул) из которых состоит физическое тело.*

Физические тела бывают твердые, жидкие и газообразные. Твердые тела сохраняют свою форму. В них атомы и молекулы жестко связаны друг с другом. Большинство предметов, окружающих нас, представляют собой твердые физические тела – стол, стул, книга, лампа, авторучка, тарелка и др. Примером жидкого физического тела является жидкость в сосуде. Вода, налитая в запечатанный целлофановый пакет и брошенная в реку, тоже представляет собой жидкое физическое тело. Форма такого тела может меняться. Однако, объем и количество частиц остаются неизменными. Газообразное физическое тело можно представить себе в виде воздушного шарика. Форма и объем шарика могут меняться в зависимости от внешних условий, но количество частиц фиксировано. В жидкости молекулы связаны между собой гибкими, подвижными связями. В газе атомы и молекулы никак не связаны между собой.

Движение *– это перемещение физического тела в пространстве и времени относительно других тел, вызванное действием сил.*

В данном определении фигурируют понятия пространства, времени и силы. Это сложные понятия, которые трудно выразить словами. Физика часто сталкивается с такими понятиями и явлениями. К ним относятся пространство, время, масса, сила, энергия и некоторые другие. Если дать определить указанные понятия философам, то разные философские школы дадут отличающиеся определения, затем начнут спорить друг с другом и доказывать правильность своих определений. Физики поступают по-другому. Они приступают к экспериментальному изучению данных явлений и собирают совокупность признаков, характерных для них. Далее утверждается, что понятие или явление – это некоторая физическая сущность, для которой справедливы найденные признаки. Попробуйте оспорить такое определение. Признаки то найдены экспериментальным путем.

Свойства пространства в классической механике

Первое: *окружающее нас пространство трехмерно.* Это свойство означает возможность введения для описания пространства трехмерной косоугольной системы координат. Любая точка P пространства описывается тремя координатами *x, y, z,* откладываемыми вдоль осей координат *Ox, Oy* и *Oz,* рис. 1.1.

Второе: *окружающее нас пространство евклидово.* Данное свойство означает возможность введения Декартовой системы координат. В такой системе координат углы между осями составляют 90^0.

Третье: *окружающее нас пространство непрерывно.* Это свойство означает отсутствие областей и отдельных точек, не принадлежащих к нашему пространству.

Четвертое: *окружающее нас пространство бесконечно.* Это означает, что оси системы координат уходят на бесконечность.

Указанные четыре свойства пространства в классической механике позволяют ввести вектора.

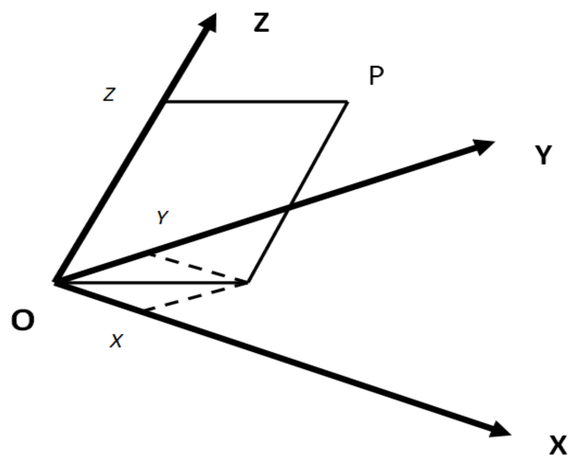


Рис. 1.1. Иллюстрация свойства трехмерности пространства

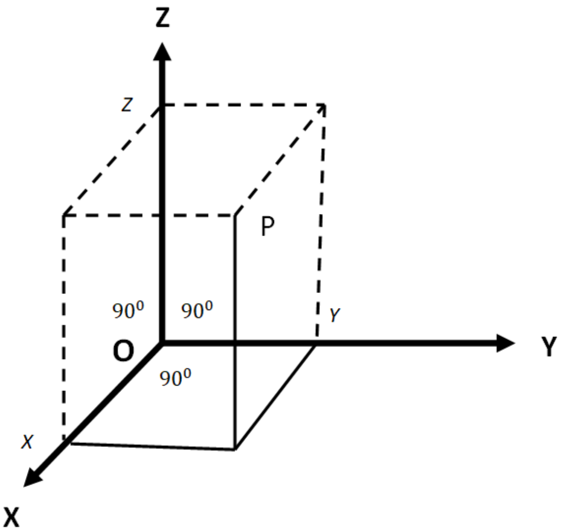


Рис. 1.2. Иллюстрация свойства евклидовости пространства

Вектор *– это направленный отрезок в пространстве, обладающий началом и концом.* Далее можно развить математический аппарат векторной алгебры и векторного анализа, который лежит в основе механики.

Поясним сказанное, рис. 1.3. Вектор не привязан к конкретным точкам пространства. Он допускает параллельный перенос в различные места пространства. Например, вектор можно перенести таким образом, чтобы его начало оказалось в начале координат. Вектор можно умножать на число, при этом изменится его длина, а направление останется прежним. Вектора можно складывать и вычитать по правилу треугольника. Существуют также более сложные операции с векторами.

Рассмотрим декартову систему координат *Oxyz*. Вдоль осей из точки O отложим орты (единичные векторы), которые обозначим $\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z}$. Длины ортов равны единице $|\boldsymbol{e_x}| = 1$, $|\boldsymbol{e_y}| = 1$, $|\boldsymbol{e_z}| = 1$. Координаты единичных векторов равны $\boldsymbol{e_x} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e_y} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e_z} = (0,0,1)$. В системе координат *Oxyz* рассмотрим вектор $\boldsymbol{r}$ с началом в точке O и концом в произвольной точке P. Вектор $\boldsymbol{r}$ называется **радиус-вектором**. Радиус вектор $\boldsymbol{r}$ можно разложить по осям системы координат

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e_x} \cdot x + \boldsymbol{e_y} \cdot y + \boldsymbol{e_z} \cdot z\,. \tag{1.1}$$

Здесь числа x, y, z называются координатами вектора $\boldsymbol{r}$. Сам вектор $\boldsymbol{r}$ можно интерпретировать как главную диагональ параллелепипеда, ребра которого лежат на осях системы координат *Oxyz*. Длины ребер равны координатам вектора $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Длина радиус-вектора составляет

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.2}$$

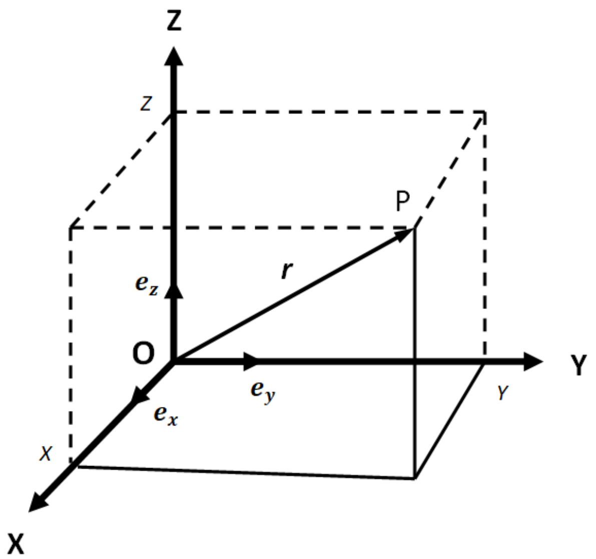


Рис. 1.3. Радиус-вектор в декартовой системе координат

Формула (1.2) получается в результате двукратного применения теоремы Пифагора для плоскости. Ее можно называть теоремой Пифагора для трехмерного евклидового пространства. Можно показать, что евклидовость пространства и выполнение в пространстве теоремы Пифагора являются эквивалентными условиями. Для более глубокого понимания переадресуем читателя к любому курсу векторной алгебры.

***Пятое**: окружающее нас пространство однородно.* Свойство однородности пространства означает следующее. Если ученый поставит один и тот же физический эксперимент в разных местах – в Москве, Иркутске, Нью-Йорке, на Луне или вообще вне пределов солнечной системы, то результат эксперимента получится абсолютно одинаковым. Все элементарные объемы пространства в классической механике идентичны. Примерно 100 лет назад женщина математик Эмми Неттер (проживавшая в Германии) доказала теорему, что свойство однородности пространства эквивалентно наличию в механике закона сохранения импульса.

***Шестое**: окружающее нас пространство изотропно.* Свойство изотропности пространства означает независимость результатов физического эксперимента от поворота на произвольный угол стола, на котором осуществляется эксперимент. Все направления в классическом пространстве эквивалентны по своим свойствам. Эмми Неттер доказала, что свойство изотропности пространства эквивалентно наличию в механике закона сохранения количества вращения. Именно по этой причине долго вращается детский волчок и практически бесконечно вращается вокруг своей оси наша планета Земля.

Свойства времени

***Первое**: время одномерно*. Это свойство означает, что для описания времени достаточно одной переменной. Если для описания пространства вводят три переменные x, y, z, то для подсчета времени вводят одну переменную, которую обычно обозначают латинской буквой t.

***Второе**: время непрерывно*. Это свойство означает отсутствие интервалов и отдельных точек на оси времени, в которых подсчет времени не реализуем. Время не может спонтанно перескакивать с одного значения на другое.

***Третье**: время течет в сторону возрастания*. Это свойство означает, что время не может убывать, а *ось времени направлена в сторону возрастания*. Это свойство исключительно важно. Оно является другой формулировкой принципа причинности в природе.

***Принцип причинности**: Следствие возникает в природе позже по времени, чем его причина.* Таким образом, в окружающем нас мире будущее не влияет на прошлое. Третье свойство времени можно также сформулировать следующим образом.

***Принцип отсутствия машины времени назад**, при помощи которой можно было бы переместиться в прошлое.* Отметим, что физика не запрещает машину времени, которая может переместить человека вперед по времени. Более того такой машиной времени является космический корабль, который разгоняется до около световых скоростей и затем возвращается в исходную точку.

***Четвертое**: время бесконечно*.

***Пятое**: время однородно.* Это свойство означает отсутствие выделенных моментов или интервалов времени. Более простым языком пятое свойство означает следующее. Результаты одинаковых экспериментов, поставленных вчера, сегодня и завтра совпадут. Принцип однородности времени позволяет при решении физических задач в качестве начального момента времени выбирать значение $t = 0$. В некоторых случаях это приводит к упрощениям в решении задачи.

Укажем также на важнейшее следствие из пятого свойства времени, полученное через 400 лет развития механики и через 200 лет после Ньютона. Эмми Неттер в начале XX в. доказала теорему, согласно которой свойство однородности времени эквивалентно наличию в механике закона сохранения энергии.

Напомним читателю, что для измерения времени человек изобрел специальное устройство, которое называется – часы. Часы бывают солнечные, песочные, водяные, механические, электрические, атомные. Похоже, что изобретательности человека нет границ.

Отметим здесь, что свойства пространства и времени, сформулированные выше, установлены экспериментальным путем.

Система отсчета. Система координат, к которой приложены часы, носит название системы отсчета. Движение физических тел всегда описывается в некоторой заранее выбранной системе отсчета. Систему отсчета всегда привязывают к каким-то избранным физическим телам, например, к нашей планете Земля, к Солнцу, к удаленным звездам, к движущемуся транспорту, к космической ракете и т.д.

Точечная масса *– это физическое тело, размеры которого малы по сравнению с расстояниями, на которые это тело перемещается.* Автомобиль, который едет из одного города в другой является точечной массой. Спутник, который вращается вокруг Земли, также является точечной массой. Введение точечной массы вместо реального физического тела, обладающего формой и объемом, упрощает решение многих задач механики. Другое название точечной массы – ***материальная точка***.

Как же производится описание движения материальной точки в механике? Начинают описание с того, что вводят конкретную систему отсчета. Далее в этой системе отсчета рассматривают материальную точку. В эту точку проводят радиус вектор $\boldsymbol{r}$. Со временем материальная точка изменяет свое положение относительно системы координат.

Траектория движения *– это линия в пространстве, вдоль которой происходит движение материальной точки.* Кончик радиус-вектора со временем скользит вдоль траектории, а сам радиус-вектор неравномерно поворачивается. Задать траекторию движения материальной точки в трехмерном пространстве значит задать векторную функцию $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$. Такая функция содержит три скалярные функции – координаты радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$. Векторная запись сокращает скалярную запись в три раза. «Ленивые» физики всегда используют векторную запись.

Рассмотрим далее изменение положения материальной точки на небольшом интервале времени Δt, рис. 1.4. Для упрощения рисунка третью ось системы координат опустим. Пусть в момент времени t материальная точка описывается радиус-вектором $\boldsymbol{r}(t)$. За интервал времени Δt радиус-вектор изменит свое положение и станет равным $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$.

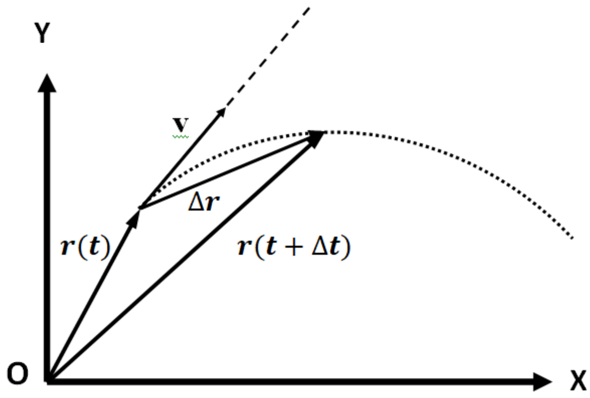


Рис. 1.4. Иллюстрация к определению мгновенной скорости

Вектор перемещения *– это вектор в пространстве, имеющий своим началом и концом начальное и конечное положение материальной точки на траектории своего движения.* Используя правило треугольника для сложения векторов, получим для вектора перемещения

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t). \tag{1.3}$$

Разделим вектор перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$ на Δt и устремим интервал времени к нулю. Получающийся таким образом предел носит название мгновенной скорости.

Мгновенная скорость *– это векторная величина, равная пределу отношения вектора перемещения материальной точки на интервал времени, за который это перемещение произошло, при стремлении интервала времени к нулю.*

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Так как вектор перемещения при стремлении $\Delta t \to 0$ стремится к касательной к траектории движения материальной точки, то мгновенная скорость $\boldsymbol{v}$ направлена вдоль касательной к траектории в точке, соответствующей моменту времени t. С течением времени мгновенная скорость изменяет как свое значение, так и направление в пространстве. Таким образом, мгновенная скорость также как и радиус-вектор является векторной функцией времени $\boldsymbol{v}(t)$. Вектор скорости обладает тремя компонентами вдоль соответствующих осей координат. По аналогии с (1.1)

$$v(t) = e_x \cdot v_x(t) + e_y \cdot v_y(t) + e_z \cdot v_z(t)\,. \tag{1.5}$$

В математическом анализе предел (1.4) называется производной. Поэтому

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}. \tag{1.6}$$

Мгновенная скорость *материальной точки равна производной от ее радиус-вектора по времени.*

Кроме мгновенной скорости в механике существует понятие средней скорости.

Средняя скорость *материальной точки равна длине пути, деленному на время в пути.*

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t}. \quad (1.7)$$

Длина пути S равна длине траектории между начальной и конечной точками пути. Например, равна длине извилистого шоссе между начальным и конечным пунктами пути, между которыми движется транспортное средство. Время в пути включает также интервалы времени на остановки. Средняя скорость является скалярной величиной.

Ускорение материальной точки определяется по формуле

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}. \quad (1.8)$$

Графическая иллюстрация ускорения представлена на рис. 1.5. Направление ускорения не связано с направлением касательной к траектории. Вектор ускорения направлен вдоль линии действия силы, вызывающей движение материальной точки. В общем случае сила действует на материальную точку под произвольным углом к касательной.

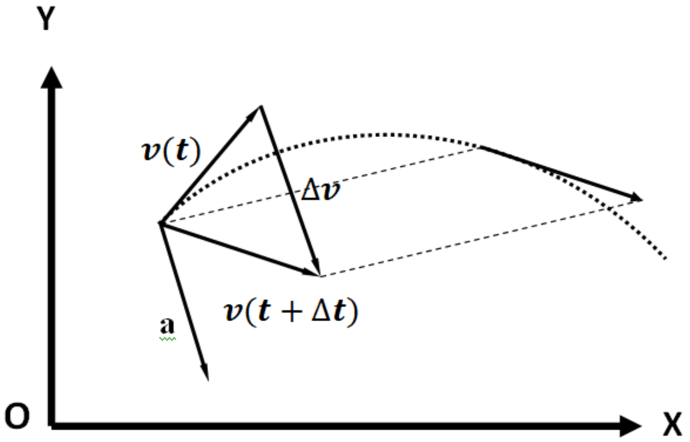


Рис. 1.5. Иллюстрация к определению ускорения

Нормальное и тангенциальное *ускорение.* Через вектор ускорения и касательную к траектории можно провести плоскость. В этой плоскости вектор ускорения можно разложить на две компоненты, параллельную и перпендикулярную к касательной. Параллельная компонента носит название тангенциальной, а перпендикулярная – нормальной. Эти две компоненты имеют разный физический смысл. Параллельная компонента вызывает изменение модуля скорости материальной точки, а перпендикулярная вызывает поворот вектора скорости в пространстве.

Для дальнейшего изложения нам потребуется обсудить понятие массы физического тела. Оно было сформулировано в трудах Исаака Ньютона в конце XVII в., затем после 200 летнего поиска современный смысл массы был найден Альбертом Эйнштейном в начале XX в. Рассмотрим сначала определение Ньютона, который опирался на эксперименты конца XVI в. школы Галилея.

Рассмотрим два небольших шара, выполненных из одного и того же вещества, но имеющих разный объем. Шары разгоняются из положения покоя одной и той же одинаково сжатой пружиной, Галилей обнаружил, что после окончания действия пружины шар большего объема приобретает меньшую скорость. Причина этого в том, что пружина на интервале времени своего воздействия сообщает шару большего объема меньшее ускорение. Количественные соотношения укладываются в закон, установленный Ньютоном $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Здесь сила упругости пружины $\boldsymbol{F}$ сообщает шару ускорение $\boldsymbol{a}$. Коэффициент пропорциональности m в этом законе был назван массой. Шар большего объема обладает большей массой по сравнению с шаром меньшего объема. Для одного и того же вещества масса пропорциональна объему шара

$$m = \rho \cdot V \ . \tag{1.9}$$

Величина ρ является характеристикой вещества и называется его **плотностью**.

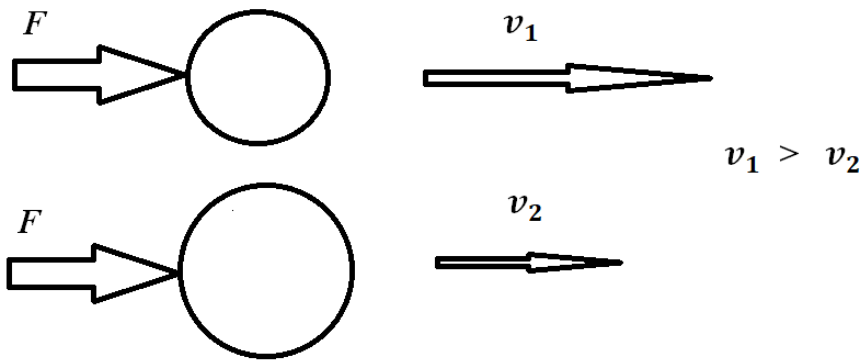


Рис. 1.6. Иллюстрация к определению массы в классической механике из экспериментов Галилея

Ньютон дал следующее определение:

Масса *– это мера инертности физического тела.* Инертность – это дословный перевод латинского слова inertia, что означает «сопротивляемость разгону». Дадим формулировку с учетом перевода иностранного слова на русский язык.

Масса *– это мера сопротивляемости разгону физических тел, на которые действуют внешние силы.*

В среде физиков циркулирует также следующее определение.

Масса *– это коэффициент пропорциональности во втором законе Ньютона.*

Отметим, что все три определения вытекают из экспериментов Галилея XVI в., обобщенных Ньютоном, и означают одно и то же. Никакого другого смысла в понятие массы в классической механике не вкладывается. И все эти определения массы, естественно, не удовлетворили физиков.

Покажем, как эксперименты Галилея влекут за собой появление дифференциального и интегрального исчисления. Введем ось *Ox*, вдоль которой пружина толкает шары. Пусть ноль приходится на конец свободно лежащей пружины. Сожмем пружину на величину x_0 в отрицательную сторону оси *Ox*. Приставим к пружине шар и отпустим пружину. На интервале $x_0 < x < 0$ на шар будет действовать сила упругости пружины (сила Гука)

$$F(x) = -kx. \tag{1.10}$$

Так как $x < 0$, то сила (1.9) положительна и направлена в сторону возрастания значений *x*. В соответствии со вторым законом Ньютона сила (1.10) будет вызывать ускорение шара

$$F(x) = m\frac{dv}{dt}. \tag{1.11}$$

Умножим соотношение (1.11) на скорость шара в точке *x*

$$F(x)v = mv\frac{dv}{dt}. \tag{1.12}$$

Так как скорость дается производной (1.6), в данном случае, от координаты шара *x*, то (1.12) можно переписать в виде

$$F(x)\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dt}. \tag{1.13}$$

Сократив дифференциал dt и подставив выражение для силы упругости пружины, получим простейшее дифференциальное уравнение

$$-kxdx = mvdv. \tag{1.14}$$

Интегрируем левую часть уравнения от x_0 до *x*, а правую часть от нуля до $v(x)$.

$$-\int_{x_0}^{x} kxdx = \int_{0}^{v(x)} mvdv. \tag{1.15}$$

Результат интегрирования следующий

$$\frac{1}{2}(kx_0^2 - kx^2) = \frac{1}{2}mv(x)^2. \tag{1.16}$$

Для скорости шара после окончания действия пружины получаем

$$v(0) = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m}}. \tag{1.17}$$

Действительно, более тяжелый шар пружина разгоняет до меньшей скорости. Вводя потенциальную энергию сжатой пружины $U = \frac{1}{2}kx_0^2$, перепишем формулу (1.17) в виде

$$v(0) = \sqrt{\frac{2U}{m}}. \tag{1.18}$$

Отметим также, что запись (1.16) соответствует выполнению закона сохранения энергии для задачи Галилея. Потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию разгоняемого шара.

Ньютон опираясь на результаты опытов Галилея (1.16)–(1.18) провел цепочку рассуждений в обратном направлении и получил формулу (1.11). При этом Ньютону пришлось разработать теорию дифференциального и интегрального исчисления, так как данная задача требует их применения.

Современный смысл понятия массы был установлен Альбертом Эйнштейном через 200 лет после Ньютона. Эйнштейн открыл **принцип эквивалентности массы и энергии**, который выражается формулой

$$E = mc^2, \tag{1.19}$$

здесь c – скорость света. Таким образом, согласно Эйнштейну:

Масса – *это энергия, затраченная на создание физического тела.*

Обсудим далее понятие силы. Видоизменим эксперимент Галилея. Возьмем один шар и будем его разгонять двумя разными пружинами – тугой и менее тугой. Увидим, что тугая пружина придаст шару бóльшую скорость. Это означает, что тугая пружина сообщает шару бóльшее ускорение. Ньютон пришел к следующему определению силы

Сила – *это мера воздействия одного тела на другое.* Далее опять следует отсылка ко второму закону Ньютона и экспериментам Галилея. Такое определение силы физиков также не удовлетворило. Поиск смысла силы продолжался практически до настоящего времени.

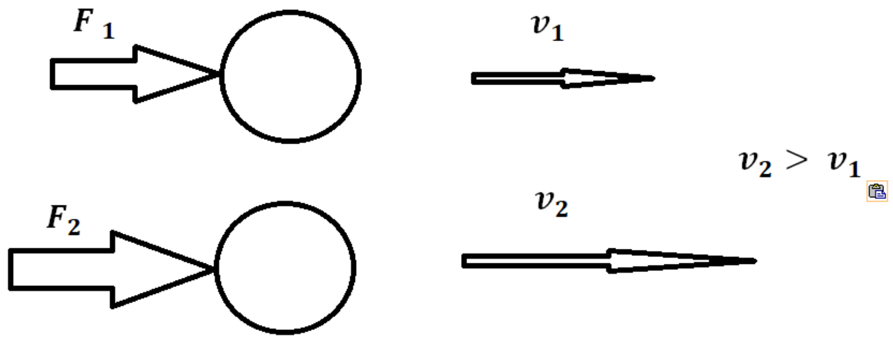


Рис. 1.7. Иллюстрация к определению силы в классической механике из экспериментов Галилея

Современное понятие силы формулирует Единая теория поля английского физика Питера Хигса. Эта теория появилась в середине XX в., а заключительный кирпич в ее здание заложило открытие бозона Хигса, за которое группа ученых получила Нобелевскую премию несколько лет назад. В Единой теории поля считается, что материя в природе представлена полевыми частицами и частицами вещества, Полевую частицу можно представить в виде материального облака, размазанного по пространству. Примером полевой частицы является квант электромагнитного поля – фотон. Частица вещества состоит из той же полевой материи, только зажатой (сконденсированной) в крошечном объеме пространства размером менее 10^{-13}см. Этот факт доказывают эксперименты по аннигиляции частиц вещества и антивещества. Стены темницы, которая зажимает поле и превращает его в частицу вещества, не являются непроницаемыми, а представляют собой как бы сферическую решетку. Поле может просачиваться через окна решетки и удаляться от своей темницы на значительные расстояния. Затем поле возвращается назад. Такое поле вы можете представить как детскую игрушку – шарик на резинке, если поблизости находится вторая частица, то возможно взаимодействие двух полей упруго связанных со своими силовыми центрами. В результате такого взаимодействия более энергичная частица будет терять импульс и энергию, а менее энергичная получать их. Причем процесс перекачки импульса и энергии от одной частицы к другой будет происходить на значительных расстояниях между ними. Таким образом:

Сила *– это скорость передачи импульса от одной частицы другой посредством полевых взаимодействий на больших расстояниях между силовыми центрами.*

Не следует думать, что ученые знают, как устроены элементарные частицы. Сказанное выше, скорее, интерпретация происходящих явлений на языке, понятном студентам, но не более того.

Интересно, что математическая часть данного утверждения уже заложена во второй закон Ньютона. В самом деле, несколько забегая вперед

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \quad (1.20)$$

Напомним, что импульсом называют произведение массы на скорость

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \quad (1.21)$$

В цепочке формул (1.20) ускорение выражаем как производную от скорости, массу вносим под знак производной, потому что в классической механике масса постоянная величина. В результате видим, что сила равна производной от импульса, т.е. скорости изменения импульса.

Задача 1. Два спортсмена бегают по дорожке АВ стадиона. Они начинают бег одновременно: первый из А в В, второй из В в А. Спортсмены бегут с неодинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от стартовой точки А. Пробежав дорожку до конца каждый из них разворачивается и бежит назад. В результате они встречаются на расстоянии 400 м от стартовой точки В. Найти длину дорожки АВ.

Решение. В данной задаче две материальные точки движутся с различными постоянными скоростями. Значительную помощь при решении таких задач оказывают графики движения в координатах xt. Движение материальной точки с постоянной скоростью описывается прямой линией. Тангенс угла наклона прямой по отношению к оси времени равен скорости движения материальной точки. Применительно к рассматриваемой задаче графики движения спортсменов (материальных точек) представлены на рис. 1.8. Обозначим скорости спортсменов $v_a,\ v_b$.

Уравнения прямых имеют вид:

(1) $x = v_a t$; (2) $x = s - v_b t$; (3) $x = s - v_a(t - t_4)$; (4) $x = v_b(t - t_3)$.

Линия (1) описывает движение первого спортсмена из точки А в точку В. Линия (3) описывает движение того же спортсмена из точки В в точку А. Линии (2) и (4) описывают движение второго спортсмена из точки В в точку А и обратно. Спортсмены встречаются в моменты времени t_1и t_2. Этим моментам времени отвечают точки пересечения линий (1) и (2), а также (3) и (4).

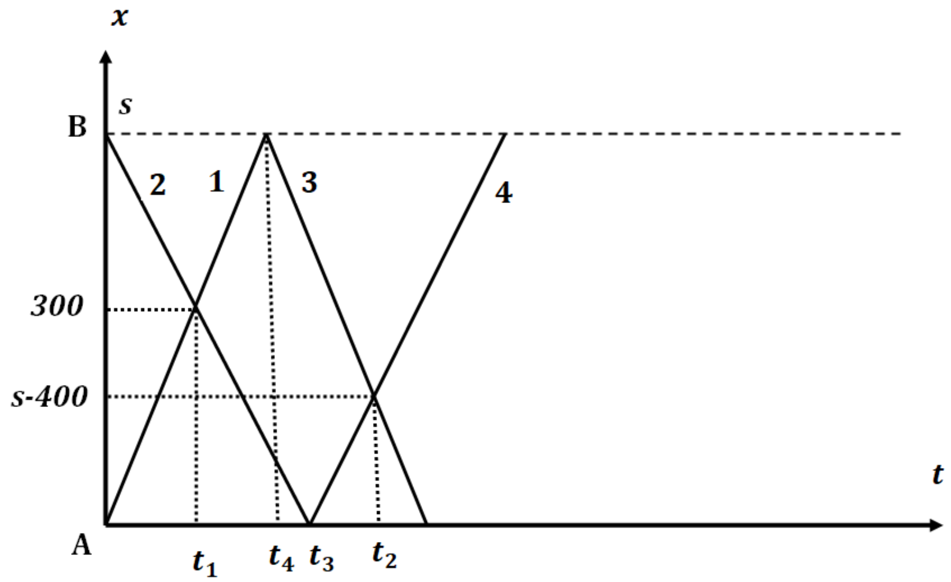


Рис. 1.8. Графики движения спортсменов по дорожке стадиона

Найдем координаты точки пересечения линий движения (1) и (2). Для этого нужно записать систему двух линейных уравнений (1) и (2)

$$x = v_a t,$$
$$x = s - v_b t,$$

и найти ее решение:

$$t_1 = \frac{s}{v_a + v_b}, \qquad x_1 = \frac{v_a s}{v_a + v_b}.$$

Приравнивая $x_1 = 300$, получим первое уравнение для решения задачи

$$\frac{s}{1+q} = 300, \qquad q = \frac{v_b}{v_a}. \tag{1.22}$$

Аналогичным образом находим координаты точки пересечения линий (3) и (4)

$$x = s - v_a(t - t_4),$$
$$x = v_b(t - t_3).$$

Учтем, что $t_3 = \frac{s}{v_b}$, $t_4 = \frac{s}{v_a}$.

Решение системы линейных уравнений имеет вид

$$t_2 = \frac{3s}{v_a + v_b}, \quad x_2 = \frac{s(2v_b - v_a)}{v_a + v_b}.$$

Приравнивая $x_2 = s - 400$, получим второе уравнение для решения задачи

$$\frac{s(2-q)}{1+q} = 400. \tag{1.23}$$

Таким образом задача свелась к решению системы уравнений (1.22) и (1.23). Поделим уравнения (1.23) и (1.22) друг на друга

$$2 - q = \frac{4}{3} \rightarrow \quad q = \frac{2}{3}.$$

Подставив $q = \frac{2}{3}$ в (1.22) найдем длину дорожки

$$s = 500 \text{ м}.$$

Задача 2. Торпедный катер вышел в точку стрельбы по вражескому кораблю. Корабль идет накатом под углом $\alpha = {}^{\pi}/_{6}$ к линии, соединяющей суда, со скоростью $v_к = 50\ {}^{км}/_{ч}$. Под каким углом должен выпустить торпеду капитан торпедного катера, чтобы потопить вражеский корабль, если торпеда имеет скорость $v_т = 100\ {}^{км}/_{ч}$.

Решение. Движение корабля-цели и торпеды образуют треугольник, представленный на рис. 1.9.

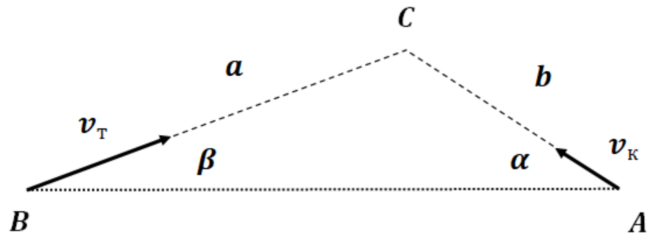


Рис. 1.9. Треугольник ABC

Для треугольника выполняется теорема синусов

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta}. \tag{1.24}$$

Кроме того, вражеский корабль и торпеда должны прийти в вершину треугольника *C* одновременно. Поэтому

$$\frac{a}{v_т} = \frac{b}{v_к}. \tag{1.25}$$

Делим уравнение (1.24) на (1.25)

$$\frac{v_т}{sin\alpha} = \frac{v_к}{sin\beta}.$$

Находим угол

$$sin\beta = \frac{v_к}{v_т} sin\alpha \ \rightarrow \beta = arcsin\left(\frac{v_к}{v_т} sin\alpha\right) = arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = 14{,}5^0.$$

Вопросы к главе 1

1. Сформулируйте отличительные признаки науки.
2. Дайте определение физике.
3. Дайте определение механике.
4. Сформулируйте понятие физического тела.
5. Что такое материальная точка?
6. Сформулируйте свойства пространства в классической механике.
7. Сформулируйте свойства времени в классической механике.
8. Что такое система отсчета? Дайте определение.
9. Дайте определение вектора и радиус-вектора.
10. Дайте определение траектории.

11. Что такое мгновенная скорость? Дайте определение. Выпишите формулу.

12. Вдоль какой линии направлена мгновенная скорость?

13. Что такое средняя скорость? Дайте определение. Выпишите формулу.

14. Что такое ускорение? Дайте определение. Выпишите формулу.

15. Что такое нормальное и тангенциальное ускорение и какова их роль в формировании траектории движения материальной точки?

16. Сформулируйте понятие массы тела в классической и современной физике.

17. Сформулируйте понятие силы в классической и современной физике.

ГЛАВА 2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Основные законы классической механики были сформулированы Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии», напечатанной в 1687 г. С момента выхода книги прошло 330 лет. Однако законы гениального Ньютона составляют фундамент классической механики и в наше время. Их точность поражает. Они выполняются до 6-го, 7-го знака после запятой. Классическая механика является основой таких дисциплин как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, теория колебаний, реактивная динамика, баллистика и многих других. Достижения современной цивилизации в области механики исключительно велики. Инженерами созданы машины, механизмы, станки, сооружения, роботы, самолеты, ракеты. Всего этого могло бы и не быть, если бы не были открыты законы механики.

Сформулируем законы Ньютона из области динамики. Дадим сначала определение.

Динамика (греч. «сила, мощь») – *раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения.*

Динамика оперирует такими понятиями, как пространство, время, масса, сила, импульс, энергия и др. Иногда слово динамика применяется в физике для обозначения процессов, развивающихся во времени, зависимости от времени каких-то величин, не обязательно имея в виду конкретный механизм или причину этой зависимости.

Три закона Ньютона:

1. Существует совокупность инерциальных систем отсчета, в которых материальная точка, на которую не действуют силы, либо равнодействующая сил равна нулю, движется прямолинейно и равномерно или покоится.

2. В инерциальной системе отсчета сила, приложенная к физическому телу, создает ускорение, согласно формуле

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{2.1}$$

где m – масса физического тела.

3. Два физических тела действуют друг на друга с силами равными и противоположно направленными.

В природе существует бесконечное число различных систем отсчета. С каждым физическим телом, движущимся в космическом пространстве, можно связать свою систему отсчета. Для наблюдателя, находящегося в одной из них, системы отсчета, привязанные к другим физическим телам, будут двигаться по криволинейным траекториям, и вращаться относительно своих осей.

Прежде всего, обратим внимание на то, что в космосе отсутствует абсолютная, выделенная система отсчета. Во времена Ньютона думали, что абсолютную систему отсчета можно привязать к удаленным звездам. Можно было бы направить три оси такой системы так, чтобы каждая ось упиралась в свою звезду. Однако, вскоре обнаружили, что удаленные звезды движутся относительно друг друга. Поэтому углы между осями координат такой системы отсчета медленно меняются. Поэтому система отсчета, связанная с удаленными звездами не является абсолютной. В XVIII и XIX вв. в физике существовала идея эфира. Ученые считали, что все космическое пространство заполнено особой материальной субстанцией – эфиром. Абсолютную систему отсчета можно было бы привязать посредством специальных экспериментов к эфиру. Однако, в конце XIX в. эксперименты Майкельсона по измерению скорости света показали, что эфира не существует. После этого физики согласились, что в природе нет абсолютной системы отсчета. Ее просто не к чему привязать.

Отсутствие абсолютной системы отсчета сразу приводит нас к выводу об относительности пространства и понятия протекания событий в одной точке пространства. Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть относительно Земли летит самолет. Пассажир хлопает ладошкой два раза по столику. В системе отсчета, связанной с самолетом, процесс хлопанья по столику будет происходить в одной точке пространства. В системе отсчета, связанной с Землей, этот же процесс будет происходить в разных точках пространства, так как за время между хлопками самолет пролетит некоторое расстояние. Ясно, что пространственно-временные процессы должны быть привязаны к конкретной системе отсчета. В противном случае, говорить о них становится бессмысленным.

Ученых в XVII в. интересовал вопрос, можно ли как-то систематизировать все системы отсчета. Ньютон сказал, да можно, и указал как это сделать. В каждой системе отсчета следует поставить эксперимент Галилея. Тогда в некоторых из них эксперимент приведет к закону движения (2.1), а в некоторых закон движения изменится. Ньютон назвал системы отсчета, в которых выполняется закон движения (2.1) инерциальными.

Инерция *– способность материальной точки в инерциальной системе отсчета сохранять прямолинейное равномерное движение в отсутствии действия сил.*

Все инерциальные системы отсчета отличаются друг от друга смещением, поворотом или движутся относительно друг друга с постоянной скоростью. Количество инерциальных систем отсчета бесконечно. Все они эквивалентны.

Таким образом, Ньютон указал, что все системы отсчета в природе делятся на две большие совокупности – инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Отличаются они выполнением и невыполнением закона динамики (2.1).

Между двумя системами отсчета (не обязательно инерциальными) выполняется ***правило преобразования скоростей Галилея***. Пусть в системе K движется частица (материальная точка) со скорость $\boldsymbol{v}$**.** Вторая система координат K' движется относительно K со скоростью $\boldsymbol{V}$. Тогда для наблюдателя, находящегося в системе отсчета K', частица будет двигаться со скоростью

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}. \tag{2.2}$$

Относительно второго закона Ньютона (2.1) скажем следующее. Он выполняется только в инерциальных системах отсчета. Гениальность Ньютона при анализе экспериментов Галилея заключалась в том, что система отсчета, связанная с Землей не является инерциальной. Планета Земля вращается. В экспериментах наблюдались малые отклонения, связанные с вращением Земли. Ньютону пришлось абстрагироваться от этих малых поправок. Сила ученого как раз и заключается в умении выделить в экспериментальных данных главное.

Обсудим причину появления третьего закона Ньютона. В классической механике взаимодействие между телами обусловлено двумя причинами. Первой причиной является закон всемирного тяготения, который вызывает появление у тел, находящихся на поверхности Земли веса. Второй причиной является закон Кулона в теории электричества. Атомы и молекулы, из которых построены физические тела, состоят из электрических зарядов, которые взаимодействуют в соответствии с законом Кулона. Закон всемирного тяготения, записанный для точечных масс, и закон Кулона, записанный для элементарных зарядов (электронов и ядер атомов), содержат в своей записи принцип действия и противодействия. Две частицы взаимодействуют вдоль линии, их соединяющей, причем силы, действующие на первую и вторую частицы, равны и направлены в противоположные стороны. При усреднении по всем парам частиц, из которых одна находится в первом теле, а вторая во втором, принцип действия и противодействия сохранится, причем компоненты сил, параллельных поверхности раздела, обнулятся из-за симметрии условий.

Таким образом, третий закон Ньютона выполняется, поскольку в его основе лежат более фундаментальные законы природы для частиц вещества (закон всемирного тяготения и закон Кулона), содержащие принцип действия и противодействия на микроуровне.

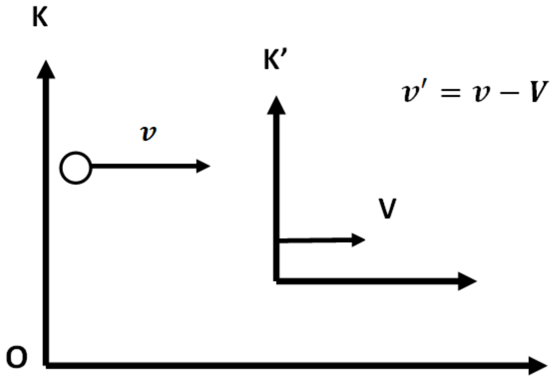


Рис. 2.1. Правило преобразования скоростей Галилея

Покажем, что из второго закона Ньютона (2.1) в случае отсутствия действия сил вытекает равномерное прямолинейное движение частицы. В самом деле, из условия $\boldsymbol{F} = 0$ следует $\boldsymbol{a} = 0$. Ускорение равно производной от скорости (1.8), Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = 0. \tag{2.3}$$

Производная равна нулю, если функция, от которой она берется, равна постоянной величине. Следовательно

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0}. \tag{2.4}$$

Скорость есть производная от радиус-вектора (1.6). Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{v_0}. \tag{2.5}$$

Перепишем (2.5) в виде

$$d\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v_0}dt. \tag{2.6}$$

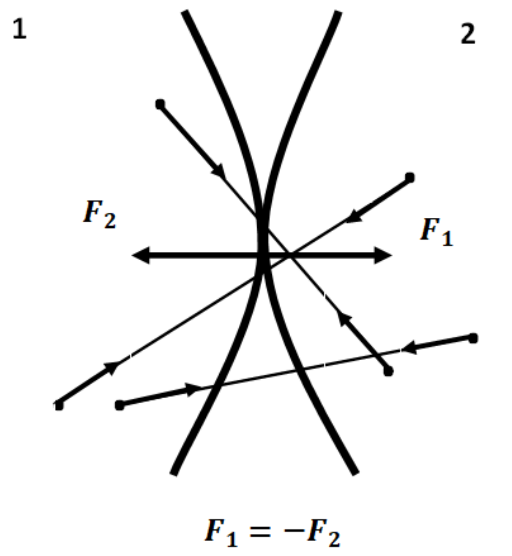


Рис. 2.2. Причиной третьего закона Ньютона является существование принципа действия и противодействия на микроуровне

Интегрируем уравнение (2.6) по $\boldsymbol{r}$ от $\boldsymbol{r}(0) \equiv \boldsymbol{r_0}$ до $\boldsymbol{r}(t)$, и по времени от 0 до t

$$\int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}(t)} \boldsymbol{dr} = \boldsymbol{v_0} \int_0^t dt. \tag{2.7}$$

Получим

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{v_0}t.$$

Переместив $\boldsymbol{r_0}$ в правую часть равенства получим окончательно

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}t. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) описывает движение частицы из начального положения $\boldsymbol{r_0}$ с постоянной скоростью $\boldsymbol{v_0}$ вдоль линии, проходящей через конец вектора $\boldsymbol{r_0}$ параллельно $\boldsymbol{v_0}$. Это утверждение иллюстрирует рис. 2.3.

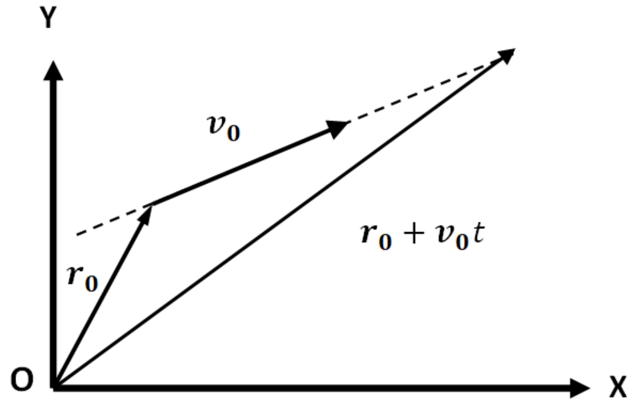


Рис. 2.3. Графическая иллюстрация решения (2.8) уравнения (2.3), которое вытекает из второго закона Ньютона в отсутствии действия сил на материальную частицу

Задача 1. Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массы m при ее движении в плоскости xy по закону $x = bcos\omega t,\ y = csin\omega t.$

Решение. В данной задаче известно уравнение траектории частицы. Сила находится по формуле второго закона Ньютона (2.1). Чтобы применить эту формулу, нужно вычислить ускорение. Для этого нужно последовательно два раза вычислить производную по времени от координат частицы

$$a_x = x'' = -b\omega^2 cos\omega t, \qquad a_y = y'' = -c\omega^2 sin\omega t.$$

$$F_x = ma_x = -mb\omega^2 cos\omega t,\ \ F_y = ma_y = -mc\omega^2 sin\omega t.$$

Модуль ускорения равен

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2\sqrt{b^2cos^2\omega t + c^2sin^2\omega t}.$$

Выражение можно преобразовать следующим образом

$$b^2cos^2\omega t + c^2sin^2\omega t = b^2\frac{1 + cos2\omega t}{2} + c^2\frac{1 - cos2\omega t}{2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{2}\left(1 + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}cos2\omega t\right)$$

$$|\boldsymbol{a}| = \omega^2\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\sqrt{1 + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}cos2\omega t}. \tag{2.9}$$

Видим, что модуль ускорения осциллирует (колеблется)на удвоенной частоте.

Направление силы определяется отношением компонент силы

$$tg\gamma = \frac{F_y}{F_x} = \frac{c}{b}tg\omega t. \tag{2.10}$$

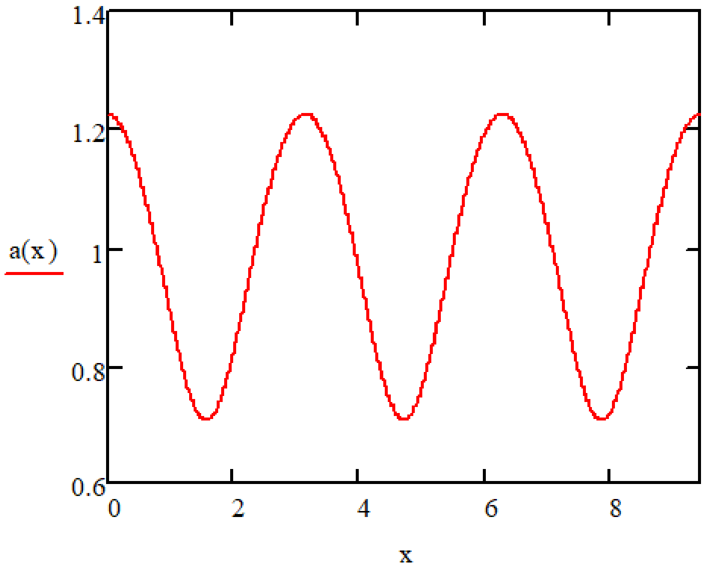


Рис. 2.4. Характерные осцилляции модуля ускорения
в зависимости от величины $x = \omega t$

Задача 2. Частица массой m движется из нулевого положения вдоль оси x по закону $x = \alpha t - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент времени $t = 1$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значение силы в точках поворота, а также в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Решение. Вычислим скорость и ускорение частицы

$$x' = \alpha - 3\beta t^2,$$

$$x'' = -6\beta t.$$

Сила, действующая на частицу равна

$$F(t) = mx'' = -6\beta m t.$$

Константу β найдем из условия, что в момент времени $t = 1$ сила, действующая на частицу, равна F_0

$$F_0 = -6\beta m \ \rightarrow F(t) = F_0 t.$$

В точке поворота скорость равна нулю

$$\alpha - 3\beta t^2 = 0 \ \rightarrow \ t^* = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}, \ \ t > 0.$$

Сила в точке поворота равна

$$F(t^*) = F_0 t^* = F_0 \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} = -6\beta m \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} = -m\sqrt{12\alpha\beta}\,. \qquad (2.11)$$

Момент возврата определяется из условия

$$x = 0 \ \rightarrow \ \alpha t - \beta t^3 = 0 \ \rightarrow \ t^{**} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \ \ t > 0.$$

Сила в момент возврата равна

$$F(t^{**}) = F_0 t^{**} = F_0\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -6\beta m\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -6m\sqrt{\alpha\beta}. \qquad (2.12)$$

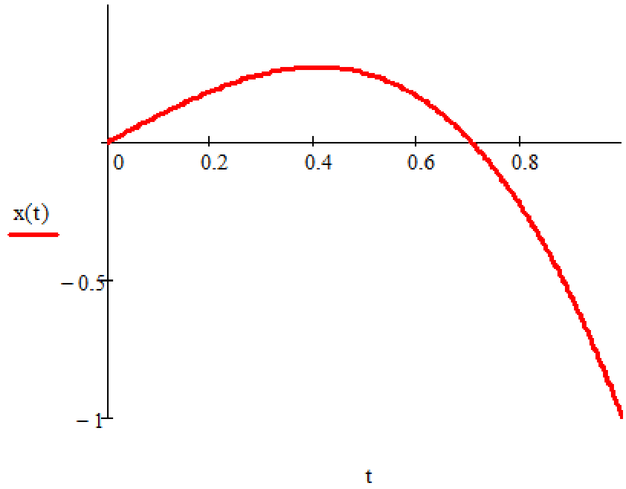


Рис. 2.5. Характерная зависимость координаты от времени: $x = t - 2t^3$

Вопросы к главе 2

1. Что изучает раздел механики, который называется «Динамика»?
2. Сформулируйте 1, 2, 3-й законы Ньютона.
3. Что такое инерция?
4. Что такое инерциальные системы отсчета? Дать определение.
5. Чем пренебрег Ньютон, обобщая опыты Галилея?
6. Выпишите формулу преобразования скоростей при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.
7. Каковы физические причины существования 3-го закона Ньютона?
8. Существует ли в природе абсолютная система отсчета?
9. Выведите уравнение движения материальной точки в инерциальной системе отсчета в отсутствие действия силы.

ГЛАВА 3. БРОСАНИЕ КАМНЕЙ

Уравнения кинематики равноускоренного движения

Рассмотрим решение уравнения динамики материальной точки, движущейся под воздействием постоянной силы. Выберем произвольную инерциальную систему отсчета. Пусть на материальную точку действует постоянная сила $\boldsymbol{F}$. Эта сила приводит к ускорению материальной точки в соответствии со вторым законом Ньютона (2.1). Разделим его на массу частицы и введем постоянное ускорение

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}. \tag{3.1}$$

Второй закон Ньютона запишем в виде

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_0}. \tag{3.2}$$

Учитывая, что ускорение есть производная от скорости (1.8), перепишем (3.2) в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \boldsymbol{a_0}. \tag{3.3}$$

Умножаем уравнение (3.3) на dt и интегрируем левую и правую части равенства

$$\int_{\boldsymbol{v_0}}^{\boldsymbol{v}(t)} d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a_0}\int_0^t dt. \tag{3.4}$$

Результат решения уравнения (3.3) следующий

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a_0}t. \tag{3.5}$$

В качестве начала отсчета времени выбрали $t = 0$, что всегда можно сделать вследствие свойства однородности времени. Считаем также, что в начальный момент времени частица имела скорость $\boldsymbol{v_0}$.

Для нахождения траектории учтем, что в (3.5) скорость есть производная от радиус-вектора (1.6). Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a_0}t. \tag{3.6}$$

Умножаем (3.6) на dt

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}dt + \boldsymbol{a_0}tdt. \tag{3.7}$$

Далее интегрируем левую и правую части (3.7)

$$\int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}(t)} d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}\int_0^t dt + \boldsymbol{a_0}\int_0^t tdt. \tag{3.8}$$

В результате получим следующее соотношение

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a_0}t^2. \tag{3.9}$$

Итак, решение задачи движения частицы под воздействием постоянной силы имеет вид системы равенств

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a_0}t^2, \\ \quad \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a_0}t. \end{cases} \tag{3.10}$$

Здесь каждое векторное равенство разворачивается в три скалярных. Всего решение (3.10) содержит 6 равенств, по три для координат и компонент вектора скорости. Решение (3.10) известно в механике под названием «уравнения кинематики равноускоренного движения». Конечно, решение может быть и равнозамедленным, это определяется направлением вектора ускорения по отношению к вектору скорости. Отметим, что решение для скорости может быть получено дифференцированием (3.9) по времени.

Решения типа (3.10) называются в математике параметрическими. Параметром здесь выступает время.

В проекции на ось Ox решение выглядит как два скалярных равенства

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2, \\ \quad v_x(t) = v_{0x} + a_{0x}t. \end{cases} \tag{3.11}$$

В решении (3.10) $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v_0}$. Для того чтобы получить уравнения кинематики вдоль осей y и z нужно заменить обозначения координат в основной записи и в индексах.

Задача бросания камня вертикально вверх

Введем систему отсчета, в которой ось Ox направлена горизонтально, вдоль поверхности Земли, а ось Oy направлена вертикально вверх, перпендикулярно поверхности Земли. Движение вдоль оси Ox в данной задаче отсутствует. Допустим, что в момент времени $t = 0$ вверх подбросили камень. Начальную скорость камня (материальной точки) обозначим $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v_0}$. Вектор $\boldsymbol{v_0} = (0, v_{0y})$ обладает одной компонентой, направленной вдоль оси Oy. Вдоль оси Oy действует ускорение свободного падения $\boldsymbol{g} = (0, -g)$, направленное вертикально вниз в сторону поверхности Земли.

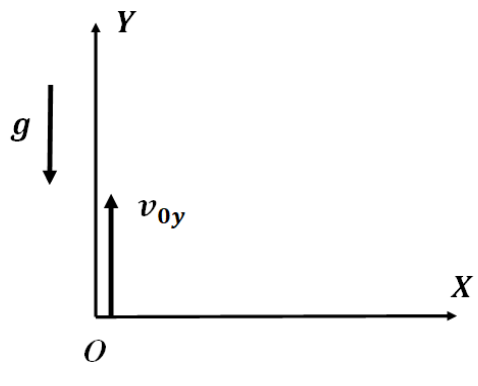


Рис. 3.1. Постановка задачи бросания камня
с поверхности земли вертикально вверх

Для данной задачи уравнения кинематики, описывающие движение камня, принимают следующий вид

$$\begin{cases} y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \\ v_y(t) = v_{0y} - gt. \end{cases} \tag{3.12}$$

Рассмотрим второе равенство. В момент времени $t = 0$ скорость камня равна начальному значению $v_y(0) = v_{0y}$. Сам камень находится в начальной точке своего движения. В интервале времени $0 < t < t_m$ скорость камня монотонно убывает и при $t = t_m$ становится равной нулю $v_y(t_m) = 0$. Значение t_m находится из условия

$$v_{0y} - gt_m = 0, \qquad (3.13)$$

откуда

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g}. \qquad (3.14)$$

Момент времени t_m называется моментом максимального подъема камня. В точке, соответствующей моменту t_m камень останавливается, скорость меняет знак, затем начинается его падение на Землю. Камень падает на интервале времени $t_m < t < 2t_m$. В момент времени $t = 2t_m$ камень достигает поверхности Земли $y(2t_m) = 0$. Значение скорости в этот момент равно $v_y(2t_m) = -v_{0y}$.

Функция $y(t)$ в системе координат y,t представляет собой перевернутую параболу, симметричную относительно вертикальной прямой, проходящей через ее максимум. График параболы проходит через начало координат.

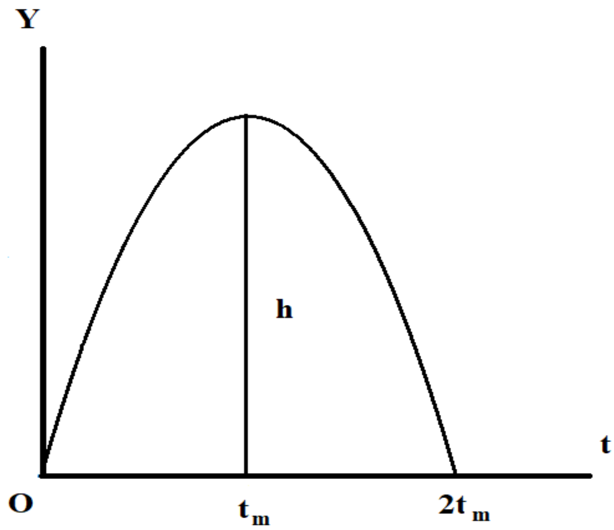


Рис. 3.2. Зависимость $y(t)$ для задачи бросания камня вертикально вверх

Высота подъема камня составляет

$$h = y(t_m) = \frac{{v_{0y}}^2}{2g}. \qquad (3.15)$$

Подъем камня на высоту h и последующее падение на Землю представляют две независимые части физического процесса движения камня. Поэтому рассматривая только вторую половину процесса, найдем скорость, с которой камень ударится о Землю, упав с высоты h

$$|v_{0y}| = \sqrt{2gh}. \qquad (3.16)$$

Время падения с высоты h составит

$$t_m = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (3.17)$$

Подсчитаем кинетическую энергию камня в момент времени t

$$W(t) \equiv \frac{1}{2}m\big[v_y(t)\big]^2 = \frac{1}{2}m\big(v_{0y} - gt\big)^2 = \frac{1}{2}m{v_{0y}}^2 - mv_{0y}gt + \frac{1}{2}m(gt)^2$$

Первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию камня в начальный момент времени

$$W_0 = \frac{1}{2}m{v_{0y}}^2.$$

Второе и третье слагаемые объединим и вынесем за скобки сочетание mg

$$W(t) = W_0 - mg\left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right).$$

В круглых скобках осталась координата $y(t)$, смотри (3.12). Приходим к соотношению

$$W_0 = W(t) + mgy(t). \qquad (3.18)$$

Полученное соотношение представляет собой закон сохранения энергии для рассматриваемой задачи. Начальная кинетическая энергия камня W_0 равна сумме кинетической энергии камня $W(t)$ в момент времени t и потенциальной энергии камня $mgy(t)$, на высоте $y(t)$. Как видим, закон сохранения энергии является следствием уравнений движения Ньютона.

Задача бросания камня под углом к горизонту

Рассмотрим в данном пункте более сложную задачу о бросании камня под углом к горизонту. К этой задаче также приводит стрельба из артиллерийского орудия. Наклоним вектор начальной скорости из предыдущей задачи на угол α по отношению к оси *Ox*, рис. 3.3,

$$\boldsymbol{v_0} = \big(v_{0x}, v_{0y}\big), \qquad v_{0x} = v_0 Cos\alpha, \qquad v_0 = \sqrt{{v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2}. \qquad (3.19)$$

Вдоль оси *Ox* в данной задаче отсутствует компонента вектора ускорения. Поэтому камень вдоль *Ox* будет двигаться с постоянной скоростью, равной *x*-компоненте начальной скорости $\boldsymbol{v_0}$. Вдоль оси *Oy* камень будет осуществлять равнозамедленное движение вверх и равноускоренное вниз.

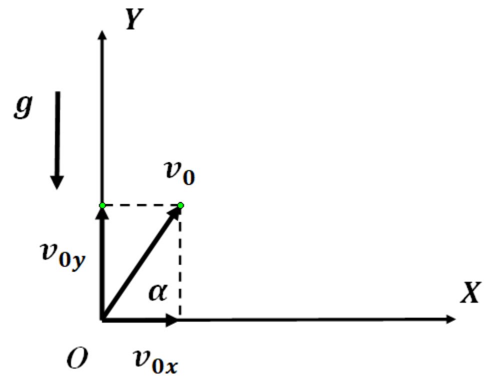


Рис. 3.3. Постановка задачи о бросании камня под углом к горизонту

Система уравнений кинематики содержит четыре уравнения, по два для каждой координаты

$$\begin{cases} y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \\ v_y(t) = v_{0y} - gt, \\ x(t) = v_{0x}t, \\ v_x(t) = v_{0x}. \end{cases} \qquad (3.20)$$

Первые два уравнения полностью совпадают с (3.12). Поэтому полностью сохраняются все формулы, полученные для задачи вертикального подбрасывания камня (3.14)–(3.17).

Получим форму траектории движения камня в системе координат Оху. Для этого нужно из третьего уравнения системы (3.20) выразить время

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

И подставить его в первое уравнение (3.20)

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2{v_{0x}}^2}x^2. \qquad (3.21)$$

Заменив компоненты скорости согласно (3.19), получим другой вид траектории

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2{v_0}^2 Cos^2\alpha}x^2. \qquad (3.22)$$

Траектория имеет вид перевернутой параболы, проходящей через начало координат, рис. 3.4. Парабола, как известно, симметрична относительно вертикали, проходящей через ее вершину.

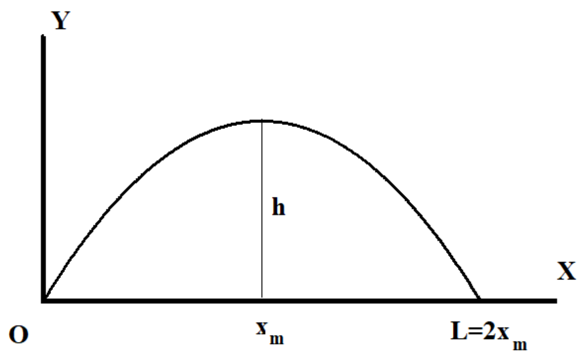


Рис. 3.4. Траектория движения при бросании камня под углом к горизонту – парабола

Приравняв $y = 0$, получим уравнение

$$x\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2{v_{0x}}^2}x\right) = 0, \qquad (3.23)$$

имеющее два корня

$$x = 0, \;\; x = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

Первый корень – это начальная точка движения. Второй корень представляет собой максимальную длину забрасывания камня

$$L = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{{v_0}^2}{g} sin2\alpha. \qquad (3.24)$$

Координата, при которой камень достигнет максимальной высоты подъема, в силу симметрии параболы составит

$$x_m = \frac{1}{2}L = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}. \qquad (3.25)$$

Из (3.24) вытекает, что максимальная длина забрасывания реализуется для угла $\alpha = {}^{\pi}/_{4} = 45^0$. При этом $sin2\alpha = 1$. При начальной скорости бросания $v_0 = 500, 600, 700$ м/с максимальная длина забрасывания составит $L = 25, 36, 49$ км. Эти цифры характерны при стрельбе из артиллерийских орудий. v_0 соответствует скорости истечения пороховых газов из ствола орудия.

Задача 1. Садовая поливальная установка имеет вид полусферы радиусом r_0 , в которой просверлены дырочки с поверхностной плотностью $\rho(\alpha)$, где угол берется по отношению к Земле. Какова должна быть зависимость плотности дырочек от угла α, чтобы обеспечить равномерный полив поверхности садового участка.

Решение. Прежде всего, пренебрежем размерами поливальной установки по сравнению с радиусом разбрызгивания воды $r_0 \ll L$. Длина заброса капли воды поливальной установкой согласно (3.24) составляет

$$L = \frac{v^2}{g} sin2\alpha,$$

здесь $v -$ скорость капли на поверхности поливальной установки, $\alpha -$ угол под которым вылетает капля. При изменении угла вылета капли на величину $d\alpha$ длина заброса изменяется на величину

$$dL = \frac{v^2}{g} 2cos2\alpha d\alpha.$$

Капли, вылетающие в пределе углов α и $\alpha + d\alpha$, попадают в кольцо между радиусами L и $L + dL$, площадь которого составляет

$$dS = 2\pi L dL.$$

В диапазоне углов $0 < \alpha < {}^{\pi}/_{4}$ длина заброса L возрастает, а величина $dL > 0$. При углах ${}^{\pi}/_{4} < \alpha < {}^{\pi}/_{2}$ длина заброса L убывает, а $dL < 0$. Так как площадь dS не может быть отрицательной, необходимо взять модуль от dL

$$dS = 2\pi \frac{v^4}{g^2} |sin4\alpha| d\alpha.$$

На поверхности поливальной установки между углами α и $\alpha + d\alpha$ лежит кольцо, площадь которого составляет

$$dS' = 2\pi r_0 cos\alpha (r_0 d\alpha) = 2\pi {r_0}^2 cos\alpha d\alpha.$$

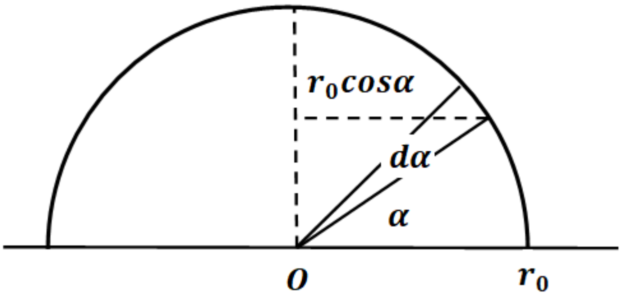


Рис. 3.5. Геометрия поливальной установки

Расход воды через это кольцо равен следующей величине

$$dQ = q\rho(\alpha)dS' = 2\pi q{r_0}^2\rho(\alpha)cos\alpha d\alpha,$$

где q – расход воды через отдельную дырочку в поливальной установке.

Расход воды dQ попадает на площадь земли dS. Поэтому расход воды на единицу поверхности садового участка составит

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{q{r_0}^2\rho(\alpha)cos\alpha}{\frac{v^4}{g^2}|sin4\alpha|} = q{r_0}^2\frac{g^2}{v^4}\rho(\alpha)\frac{1}{4sin\alpha|cos2\alpha|}.$$

Для того, чтобы полив был равномерный, необходимо, чтобы в полученной формуле отсутствовала зависимость от угла α. Это возможно, если

$$\rho(\alpha) = \rho_0 sin\alpha|cos2\alpha|.$$

ρ_0 – константа нормировки, которую можно получить, вычислив полный расход воды Q

$$Q = \frac{\pi}{2}q{r_0}^2\rho_0\int_0^{\pi/2}|sin4\alpha|d\alpha = \frac{\pi}{2}q{r_0}^2\rho_0.$$

Отсюда

$$\rho_0 = \frac{2}{\pi}\frac{Q}{q{r_0}^2}.$$

Получаем решение задачи в виде

$$\rho(\alpha) = 4\frac{Q}{q(2\pi{r_0}^2)}sin\alpha|cos2\alpha|. \qquad (3.26)$$

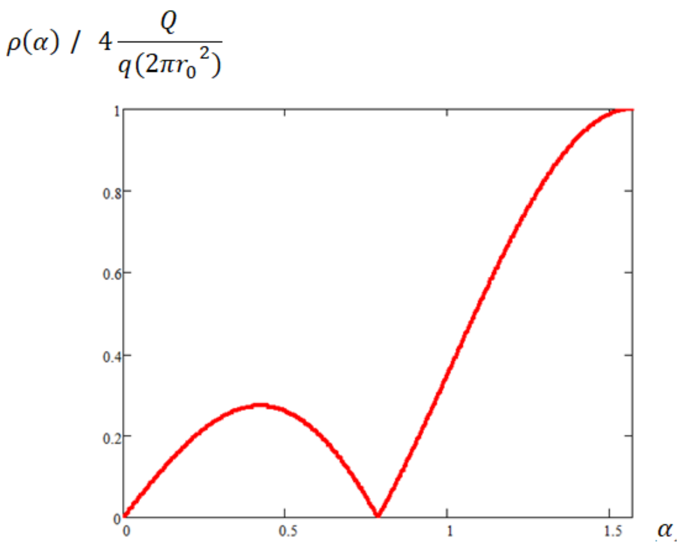


Рис. 3.6. Плотность дырочек на сфере поливальной установки как функция угла α

Задача 2. За последнюю секунду свободного падения тело пролетело три четверти высоты. С какой высоты падало тело.

Решение. Полное время падения тела на землю равно

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

За время, прошедшее с начала падения $t_h - 1$, тело пролетит расстояние $\frac{1}{4}h$, поэтому

$$\frac{1}{4}h = \frac{1}{2}g(t_h - 1)^2. \qquad (3.27)$$

Формулу (3.27) можно записать в виде

$$\frac{1}{4}t_h{}^2 = (t_h - 1)^2. \qquad (3.28)$$

Уравнение (3.28) имеет два решения

$$t_h = 2; \frac{2}{3}\,\text{с} \rightarrow h = 20;\ \frac{20}{9}\ \text{м}.$$

Вопросы к главе 3

1. Выведите уравнение движения материальной точки в случае действия постоянной силы.

2. Выведите уравнение для траектории материального тела, брошенного под углом к горизонту.

3. В задаче бросания получите максимальную длину заброса, высоту подъема, время полета тела, координату максимального подъема тела.

4. Под каким углом надо бросать тело, чтобы длина заброса оказалась максимальной?

ГЛАВА 4. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Законы движения планет по орбитам вокруг Солнца установил Иоганн Кеплер в XVII в., задолго до Ньютона. Кеплер закончил Университет в Тюбингене (Германия), работал школьным учителем, читал лекции по математике в Университете города Граца (Австрия). Вскоре Кеплер на некоторое время переехал в город Прагу в Чехии, где работал помощником астронома Тихо Браге. Когда Тихо Браге умер, Кеплеру достался обширный архив астрономических наблюдений. Обработав этот архив, Кеплер в 1609 г. написал книгу «Новая астрономия», в которой сформулировал знаменитые законы движения планет вокруг Солнца применительно к Марсу. В 1618 г. вышла вторая книга Кеплера с названием «Гармония мира», в которой ученый делает выводы о движении всех планет солнечной системы.

Три закона Кеплера

1. Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

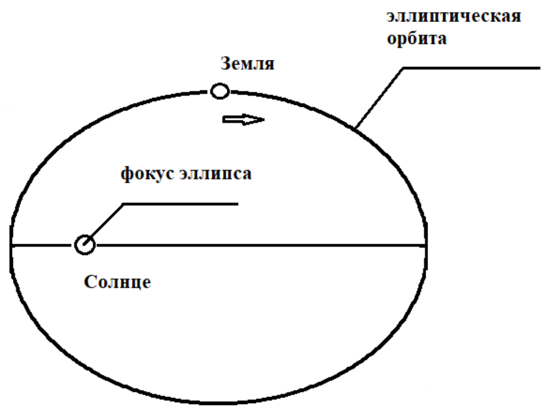


Рис. 4.1. Иллюстрация первого закона Кеплера

2. Радиус-вектор, проведенный из центра солнца в центр планеты, при движении планеты вокруг Солнца за равное время заметает равную площадь.

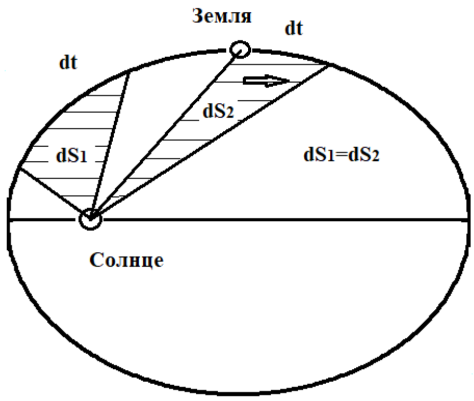


Рис. 4.2. Иллюстрация второго закона Кеплера

3. Квадрат периода обращения планеты вокруг Солнца пропорционален кубу линейного размера орбиты, причем коэффициент пропорциональности одинаков для всех планет солнечной системы.

Когда Ньютон анализировал движение планет солнечной системы, у него на столе лежали книги Кеплера. Что же сделал Ньютон? Он решил обратную задачу. Опираясь на законы Кеплера, вывел закон силового взаимодействия Солнца с планетами. Далее Ньютон обобщил полученное соотношение и предложил считать, что любые две массы в природе тяготеют в соответствии с установленным соотношением. Результат Ньютона называют «Законом всемирного тяготения».

Закон всемирного тяготения

Рассмотрим две материальные точки в пространстве с массами m_1 и m_2, которые находятся в системе координат *Oxyz*. Через любые две точки можно провести прямую линию *l*. Через линию *l* можно провести плоскость α, перпендикулярную плоскости *Oxz*. Далее можно повернуть систему координат так, чтобы плоскость *Oxy* и плоскость α совпали, см. рис. 4.3. Видим, что описание задачи можно провести на плоскости. Третью ось системы координат опустим.

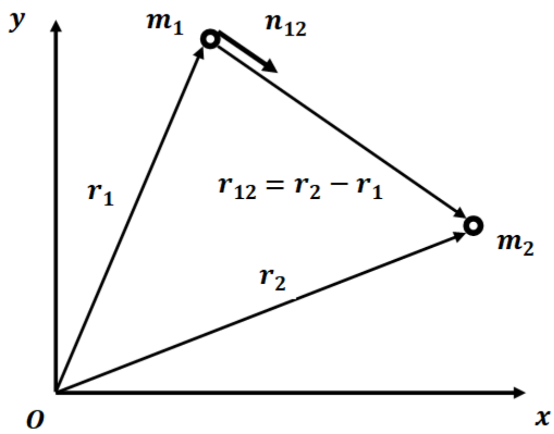


Рис. 4.3. К закону всемирного тяготения

В точки 1 и 2 проведем радиус-векторы $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$. Расстояние между точками 1 и 2 описывается вектором $\boldsymbol{r_{12}}$

$$\boldsymbol{r_{12}} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}. \qquad (4.1)$$

Вектор $\boldsymbol{r_{12}}$ начинается в точке 1 и заканчивается в точке 2. Важно расположение индексов. Если поменять местами индексы, то вектор

$$\boldsymbol{r_{21}} = \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2} \qquad (4.2)$$

будет начинаться в точке 2 заканчиваться в точке 1.

Закон всемирного тяготения сформулирован Ньютоном следующим образом

$$\boldsymbol{F_{12}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r_{12}}|^2} \boldsymbol{n_{12}}. \qquad (4.3)$$

Здесь $\boldsymbol{n_{12}}$ единичный вектор, направленный из точки 1 в точку 2

$$\boldsymbol{n_{12}} = \frac{\boldsymbol{r_{12}}}{|\boldsymbol{r_{12}}|}. \qquad (4.4)$$

Формула (4.3) означает, что масса 1 действует на массу 2 с силой (4.3). Эта сила направлена вдоль линии, соединяющей обе массы, в сторону массы 1. Сила тяготения прямо пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Знак минус перед формулой переворачивает направление единичного вектора $\boldsymbol{n_{12}}$, который становится направленным в сторону массы 1.

Константа γ называется гравитационной постоянной и ее значение равно

$$\gamma = 6{,}6725 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}. \tag{4.5}$$

Поменяем местами индексы в формуле (4.3)

$$\boldsymbol{F_{21}} = -\gamma \frac{m_2 m_1}{|\boldsymbol{r_{21}}|^2} \boldsymbol{n_{21}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r_{12}}|^2} \boldsymbol{n_{12}} = -\boldsymbol{F_{12}}. \tag{4.6}$$

Массы можно переставить местами. Порядок следования индексов в знаменателе под знаком модуля не существен, так как модуль «съедает» знак минус. Поменяется знак лишь у единичного вектора (4.4) $\boldsymbol{n_{21}} = -\boldsymbol{n_{12}}$, Соотношение (4.6) есть закон действия и противодействия для всемирного тяготения. Таким образом, третий закон Ньютона содержится в формуле (4.3), выражающей собой математическую запись закона всемирного тяготения.

Ускорение свободного падения *– это напряженность поля тяготения, создаваемого тяготеющей массой.*

Перепишем формулу (4.3) в виде, выделив массу m_2

$$\boldsymbol{F_{12}} = \boldsymbol{g}_{12} m_2, \quad \boldsymbol{g}_{12} = -\gamma \frac{m_1}{|\boldsymbol{r_{12}}|^2} \boldsymbol{n_{12}}. \tag{4.7}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{g}_{12}$ имеет размерность ускорения и называется ускорением свободного падения. Масса m_1 создает в окружающем пространстве поле тяготения, напряженность которого описывается вектором ускорения свободного падения. Поле тяготения является центральным. Вектор $\boldsymbol{g}_{12}$ направлен точно в центр массы m_1. Поле тяготения существует в отсутствие второй массы. Оно спадает с расстоянием квадратичным образом. Если в поле тяготения, создаваемое первой массой поместить вторую массу, то на нее действует сила притяжения со стороны первой массы, величина которой определяется формулой (4.7).

В данном пункте мы впервые применили термин «поле». В математике **полем** называют функцию от радиус-вектора. Такая функция может быть скалярной, векторной, матричной или тензорной. Она, как правило, удовлетворяет физической системе уравнений, например, системе уравнений Максвелла, квантовой электродинамики или уравнениям единой теории поля. Часто поле бывает нестационарным, т.е. зависит не только от радиус-вектора, но и от времени. В данном разделе зависимость от времени не рассматривается.

Вес физического тела *– это сила притяжения, которая действует на тело со стороны планеты.* Чтобы получить выражение для веса, которым обладает небольшое тело вблизи поверхности планеты, нужно планету покрыть объемной сеткой. Для каждого элемента массы планеты выписать соотношение типа (4.3). Затем просуммировать по всей массе планеты. Измельчив сетку, перейдем к интегралу по массе планеты. При таком интегрировании компонента силы притяжения параллельная поверхности Земли исчезает из-за цилиндрической симметрии задачи. Останется только компонента силы притяжения перпендикулярная поверхности Земли. Она и называется весом физического тела

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}. \tag{4.8}$$

Масса небольшого тела не участвует в интегрировании и выносится за знак интеграла. Все сказанное является, по существу, вычислением ускорения свободного падения над поверхностью планеты.

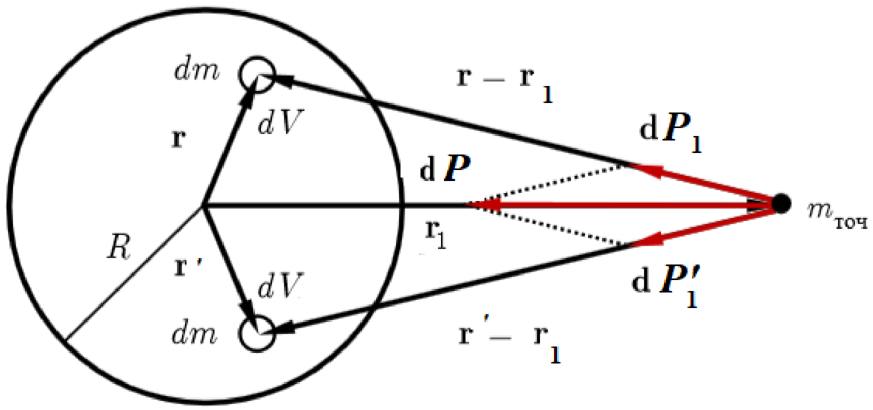


Рис. 4.4. Иллюстрация центрального характера силы притяжения материальной точки сферической планетой
Источник: URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F1434467344/pdf.pdf.

В теории тяготения доказана теорема, что планета в виде шара со сферическим распределением массы притягивает материальную точку, находящуюся вне планеты, по закону всемирного тяготения, в котором масса планеты является материальной точкой, расположенной в ее центре. Если точка находится внутри планеты, то вывод сохраняется, если отбросить сферический слой материала планеты, находящийся над материальной точкой.

Принцип эквивалентности динамической и гравитационной массы

Представим второй закон Ньютона для произвольного тела в виде

$$m_d = {|\boldsymbol{F}|}/{|\boldsymbol{a}|}. \tag{4.9}$$

Воспользовавшись формулой (4.8) для веса физического тела, массу тела также запишем в аналогичном виде

$$m_g = {|\boldsymbol{P}|}/{|\boldsymbol{g}|}. \tag{4.10}$$

В формулах (4.9)–(4.10) фигурируют динамическая масса m_d и гравитационная масса m_g одного и того же тела. Ниоткуда не следует, что эти две массы должны быть равны. В XVIII–XIX вв. физики поставили большое количество экспериментов по замерам динамической и гравитационной масс физических тел. Различий обнаружено не было. В связи с этим Эйнштейн в начале XX в. сформулировал *принцип эквивалентности динамической и гравитационной массы*

$$m_g = m_d. \tag{4.11}$$

В природе существует одна масса, которая одинаково проявляется в механике и в гравитационных явлениях. Эйнштейн положил принцип эквивалентности динамической и гравитационной массы в основу своей Общей теории относительности.

Задача 1. Определить плотность шарообразной планеты, если вес тела на полюсе в 2 раза больше, чем на экваторе. Период вращения планеты вокруг своей оси $T = 2$ ч 40 мин.

Решение. В системе отсчета, связанной с планетой, вес тела mg на экваторе уменьшает центробежная сила $m\omega^2 R$, обусловленная вращением планеты вокруг своей оси

$$\frac{mg - m\omega^2 R}{mg} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}mg = m\omega^2 R \ \rightarrow \frac{1}{2}g = \omega^2 R\ .$$

Ускорение свободного падения на поверхности планеты определяется из закона Всемирного тяготения

$$g = \gamma\frac{M}{R^2}.$$

Период обращения планеты вокруг своей оси связан с частотой обращения

$$\omega T = 2\pi.$$

С учетом этих соотношений

$$\frac{1}{2}\gamma\frac{M}{R^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Плотность вещества планеты равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \ \rightarrow\ \frac{M}{R^3} = \frac{4\pi}{3}\rho.$$

Поэтому

$$\frac{2\pi}{3}\gamma\rho = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \ \rightarrow\ \rho = \frac{6\pi}{\gamma T^2}. \tag{4.12}$$

Учитывая значение гравитационной постоянной

$$\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{СИ},$$

вычисляем плотность

$$\rho = 3{,}07\cdot 10^{3}\ \text{кг}\backslash\text{м}^3.$$

Задача 2. Спутник движется по круговой орбите в плоскости экватора на высоте от поверхности планеты, равной ее радиусу. Найдите линейную скорость спутника. Радиус планеты $R = 7\,200$ км. Ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 10\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$.

Решение. Центростремительная сила при вращении спутника вокруг планеты равна силе притяжения спутника планетой

$$\frac{mv^2}{2R} = \gamma\frac{mM}{(2R)^2} = \frac{mg}{4}.$$

В результате получим

$$v^2 = \frac{gR}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{gR}{2}}. \tag{4.13}$$

Вычисление дает

$$v = 6 \text{ км/с}.$$

Вопросы к главе 4

1. Запишите закон Всемирного тяготения в векторной форме для двух точечных масс.
2. Выделите из закона Всемирного тяготения, записанного в векторной форме, ускорение свободного падения.
3. Запишите формулу для веса физического тела, находящегося на поверхности Земли.
4. Сформулируйте три закона Кеплера.
5. Каковы следствия из эквивалентности динамической и гравитационной массы?

ГЛАВА 5. ВРАЩЕНИЕ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

В природе и в технике распространено вращение физических тел. Камень катится с горы. Катится ствол дерева с пригорка. Вращается наша Земля вокруг своей оси. Вращаются колесо автомобиля, ротор турбины, вал электродвигателя. Проще всего изучить вращательное движение, рассмотрев вращение материальной точки по окружности.

Итак, пусть в системе координат Oxy имеется окружность радиуса r с центром в начале координат. Пусть на окружности имеется материальная точка A. Положение точки в момент времени t описывается радиус-вектором $r(t)$. Точка равномерно движется по окружности со скоростью v, которая в каждый момент времени направлена по касательной к этой окружности. Радиус-вектор равномерно вращается вместе с точкой A.

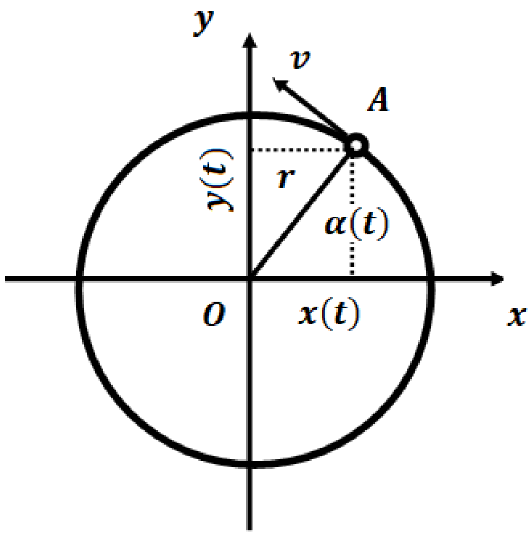


Рис. 5.1. Постановка задачи о вращении точки по окружности

Для описания вращательного движения используется понятие плоского угла. Рассмотрим еще раз окружность радиуса r. Проведем из ее центра два радиуса в точки A и B. Между этими точками будет заключена дуга окружности длины l. Между радиусами и дугой находится **сектор** окружности. См. рис. 5.2.

Плоским углом *называют отношение длины дуги к радиусу окружности*

$$\alpha = \frac{l}{r}. \tag{5.1}$$

Мерой угла является 1 радиан. Это такой угол, который равен отношению длины дуги, равной радиусу l=r, к радиусу окружности

$$1\text{рад} = \frac{r}{r}. \tag{5.2}$$

В геометрии используется также старая Византийская мера для плоских углов. Окружность делят радиусами на 360 равных частей. Одна такая часть называется 1 градус. Градус делят на 60 минут, минуту на 60 секунд.

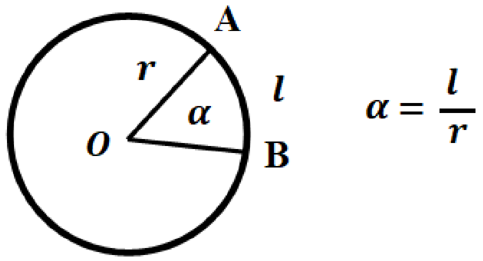


Рис. 5.2. Определение плоского угла

Один оборот радиуса с возвращением в исходное положение соответствует углу

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 360^0. \qquad (5.3)$$

Отсюда получаем перевод радианов в градусы и обратно

$$1\text{рад} = \frac{180^0}{\pi} = 57.3^0, \quad 1^0 = \frac{\pi}{180}\text{рад}. \qquad (5.4)$$

При равномерном движении точки A по окружности угол α будет линейной функцией времени

$$\alpha(t) = \omega t + \varphi. \qquad (5.5)$$

Величина ω носит название **угловой скорости**. Она равна углу, который радиус пробегает за 1 секунду своего вращения. Угол $\alpha(t)$ в физике имеет другое название. Он называется **фаза**. Угол φ называется **начальная фаза**. Он определяет положение точки A на окружности в начальный момент времени $t=0$. Начальная фаза может быть обращена в ноль поворотом системы координат Oxy на угол φ. При дальнейшем изложении в данной главе начальную фазу опустим.

Запишем координаты точки A, перемещающейся по окружности, в момент времени t. Из точки A опустим перпендикуляр к оси Ox. Возникнет прямоугольный треугольник, катеты которого как раз будут равны $x(t)$ и $y(t)$. Поэтому

$$x(t) = rcos(\omega t), \qquad y(t) = rsin(\omega t). \qquad (5.6)$$

Применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2[cos(\omega t)^2 + sin(\omega t)^2] = r^2. \qquad (5.7)$$

Зависимость от времени выпадает, так как здесь выполняется основное тригонометрическое тождество.

Скорость равномерного вращения

Скорость точки А дается производной от радиус-вектора согласно (1.6). В данном случае движение происходит на плоскости, поэтому скорость обладает двумя компонентами вдоль каждой оси координат. Произведем вычисление этих компонент

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}rCos(\omega t) = -r\omega Sin(\omega t),$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}rSin(\omega t) = r\omega Cos(\omega t). \quad (5.8)$$

Вычислим квадрат модуля скорости

$$v^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = (r\omega)^2[sin(\omega t)^2 + cos(\omega t)^2] = (r\omega)^2. \quad (5.9)$$

Отсюда получим формулу для линейной скорости вращения материальной точки

$$v = r\omega. \quad (5.10)$$

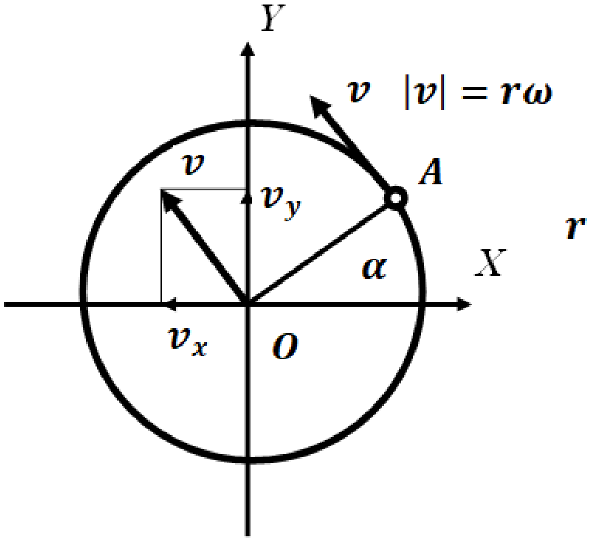


Рис. 5.3. Иллюстрация линейной скорости равномерного вращения

Формула (5.10) легко получается также из следующих соображений. За время, равное периоду обращения, точка пробежит расстояние, равное длине окружности

$$vT = 2\pi r. \quad (5.11)$$

С другой стороны, если умножить угловую скорость на период, то точка прокрутится на полный оборот

$$\omega T = 2\pi. \quad (5.12)$$

Отсюда получаем выражение для периода вращения

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.13)$$

Подставив период в (5.11), получим формулу (5.10) для линейной скорости вращения.

Ускорение при равномерном вращении

Вектор ускорения в плоской задаче также будет обладать двумя проекциями на оси координат. Вычислим их, воспользовавшись формулой (1.8)

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d}{dt}\big(-r\omega Sin(\omega t)\big) = -r\omega^2 Cos(\omega t),$$
$$a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t) = \frac{d}{dt}\big(r\omega Cos(\omega t)\big) = -r\omega^2 Sin(\omega t). \quad (5.14)$$

Вычислим квадрат модуля вектора ускорения

$$a^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = a_x(t)^2 + a_y(t)^2 = (r\omega^2)^2[Cos(\omega t)^2 + Sin(\omega t)^2]$$
$$= (r\omega^2)^2. \quad (5.15)$$

Приходим в результате к формуле для длины вектора ускорения

$$a = r\omega^2. \tag{5.16}$$

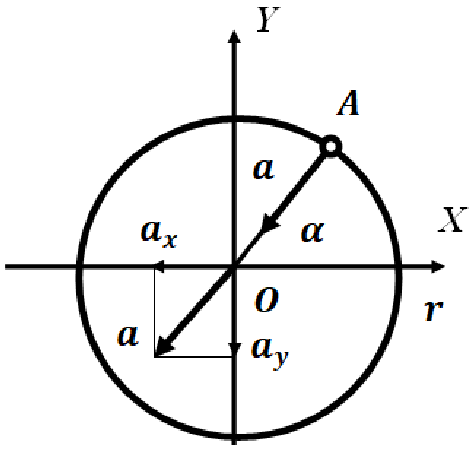


Рис. 5.4. Центростремительное ускорение при равномерном вращении

Если выразить угловую скорость из (5.10), то получаем еще один вариант записи ускорения для вращающейся материальной точки

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{5.17}$$

Знаки в (5.14) показывают, что вектор ускорения направлен из точки А в центр окружности, по которой происходит вращение. Такое ускорение называют **центростремительным**. В соответствии со вторым законом Ньютона любое ускорение вызвано действием силы. При вращении материальной точки по окружности на точку действует центростремительная сила, которая и вызывает центростремительное ускорение. Чтобы получить выражение для центростремительной силы, нужно (5.16) умножить на массу вращающейся материальной точки

$$F_c = \frac{mv^2}{r}. \tag{5.18}$$

При вращении спутника вокруг Земли в качестве центростремительной силы выступает сила тяготения Земли. При повороте мотоциклиста центростремительную силу создает горизонтальная компонента силы реакции опоры, направленной под углом к поверхности земли.

Обороты и частота

Кроме угловой скорости в технике часто используется понятие оборотов. При вращении кроме наматываемого угла можно подсчитывать количество оборотов вращающегося тела. Для этого нужно угол $\alpha(t)$ разделить на 2π. **Число оборотов** за время t составит

$$N = \frac{\alpha(t)}{2\pi} = \frac{\omega t}{2\pi}. \tag{5.19}$$

Если разделить полное число оборотов на время, за которое они совершены, получим число оборотов за одну секунду. Эта величина носит название **частоты оборотов**

$$f = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (5.20)$$

Период вращения, равный времени одного оборота, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \qquad (5.21)$$

Частота оборотов измеряется в герцах. Один оборот в секунду равен одному герцу.

Частота оборотов вала двигателя указывается в автомобилях, например 2 400 об/мин = 40 Гц. Ротор электрического генератора на электрической станции вращается с частотой 3 000 об/мин = 50 Гц. Стиральная машина вращает барабан при отжиме белья с частотой 600 об/мин = 10 Гц.

Неравномерное вращение точки по окружности. Такое вращение возникает, когда на вращающееся тело действует момент силы (определение момента силы смотри в гл. 7). В условиях неравномерного вращения формула (5.5) для угла не выполняется. Зависимость угла от времени $\alpha(t)$ может быть произвольной. Для угловой скорости в этом случае выполнено соотношение

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\alpha(t). \qquad (5.22)$$

Вводят также угловое ускорение по формуле

$$\beta(t) = \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{d^2}{dt^2}\alpha(t). \qquad (5.23)$$

С вращением физических тел по окружности связаны задачи по вычислению космических скоростей. Рассмотрим их в качестве наглядных примеров.

1-я космическая скорость *– это скорость, которую нужно сообщить ракете, чтобы вывести ее на круговую орбиту вокруг Земли.* Найдем, с какой скоростью вращается спутник по круговой орбите вокруг Земли. Радиус Земли составляет $R_з = 6\ 370$ км. Высоту спутника над поверхностью Земли обозначим буквой h. Чтобы найти указанную скорость, которая называется 1-й космической скоростью, приравняем ускорение свободного падения, создаваемое планетой на высоте h (4.7), центростремительному ускорению спутника (5.16)

$$g = a \ \rightarrow \ \gamma \frac{M_з}{(R_з + h)^2} = \frac{v_1^2}{(R_з + h)}.$$

Учитывая, что $R_з \gg h$, пренебрежем величиной h, получим

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M_з}{R_з}} = \sqrt{R_з g} \cong 7.90 \cdot 10^3 \ {}^{м}/_{с}. \qquad (5.24)$$

2-я космическая скорость *– это скорость, которую нужно сообщить ракете, чтобы вывести ее за пределы поля тяготения Земли.* Для решения данной задачи подсчитаем работу, которую совершает сила притяжения Земли при движении ракеты от поверхности Земли до расстояний многократно превосходящих радиус Земли. Направим ось системы координат из центра Земли на бесконечность. Элементарная работа при смещении ракеты на величину dr будет равна силе тяготения, умноженной на dr

$$dA = \gamma \frac{M_з m}{r^2} dr. \tag{5.25}$$

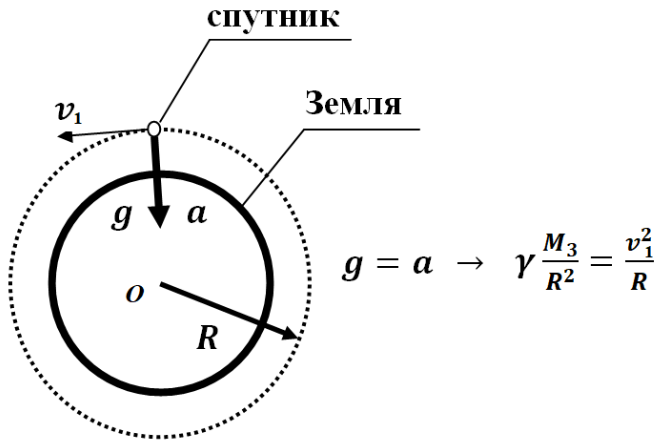


Рис. 5.5. Первая космическая скорость

Интегрируем (5.25) от радиуса Земли до бесконечности

$$A = \gamma M_з m \int_{R_з}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \gamma M_з m \int_{R_з}^{\infty} d\left(-\frac{1}{r}\right) = \gamma \frac{M_з m}{R_з}. \tag{5.26}$$

На преодоление поля тяготения Земли ракета затрачивает свою кинетическую энергию. Поэтому приравниваем вычисленную работу кинетической энергии ракеты у поверхности Земли.

$$\frac{m v_2^2}{2} = \gamma \frac{M_з m}{R_з}.$$

В результате получаем выражение для второй космической скорости

$$v_2 = \sqrt{\gamma \frac{2M_з}{R_з}} = \sqrt{2R_з g} = \sqrt{2} v_1 \cong 11.18 \text{ км/с}. \tag{5.27}$$

2-я космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше 1-й космической.

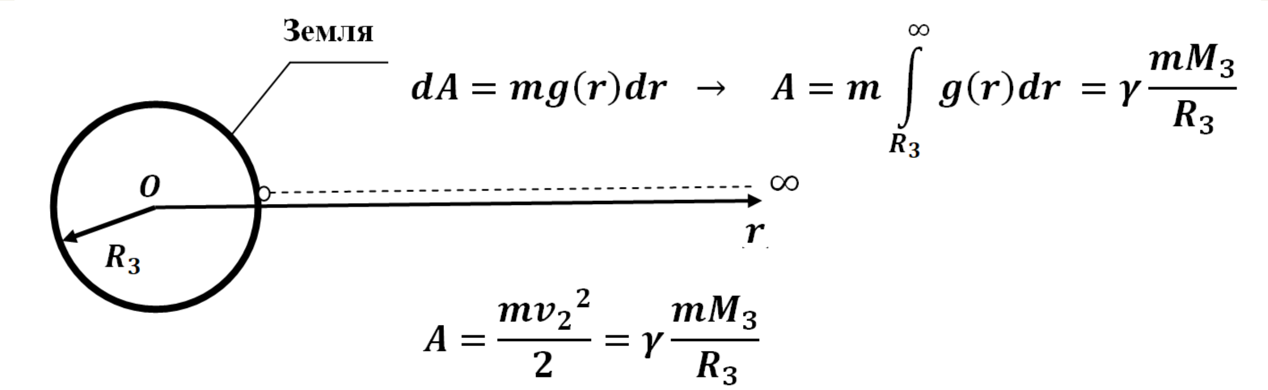


Рис. 5.6. Вторая космическая скорость

3-я космическая скорость *– это скорость, которую нужно сообщить ракете, чтобы она вышла за пределы солнечной системы.* Рассмотрение задачи для этого случая несколько сложнее. Если ракета стартует с поверхности Земли, то она сначала должна преодолеть поле тяготения Земли, затем поле тяготения Солнца. Для того, чтобы преодолеть поле тяготения Солнца, вылетев с орбиты Земли, ракета должна обладать скоростью по отношению к Солнцу v_C. Для подсчета требуется брать интеграл типа (5.26) от орбиты Земли до бесконечности. Работу совершает сила притяжения солнца. Вычисления приводят к выражению

$$v_{\text{с}} = \sqrt{\gamma \frac{2M_{\text{с}}}{R_{\text{оз}}}}. \qquad (5.28)$$

Для уменьшения затрат энергии целесообразно запускать ракету в сторону движения Земли по своей орбите вокруг Солнца. Тогда ракета будет иметь дополнительную начальную скорость, равную скорости движения Земли по своей орбите $v_{\text{оз}}$. Эту скорость найдем, приравнивая центростремительное ускорение Земли ускорению свободного падения Солнца на расстоянии орбиты планеты

$$g_{\text{с}} = a_{\text{з}} \ \rightarrow \ \gamma \frac{M_{\text{с}}}{{R_{\text{оз}}}^2} = \frac{v_{\text{оз}}^2}{R_{\text{з}}} \ \rightarrow \ v_{\text{оз}} = \sqrt{\gamma \frac{M_{\text{с}}}{R_{\text{оз}}}}. \qquad (5.29)$$

Таким образом, начальная скорость ракеты для преодоления тяготения Солнца составляет

$$v_{\text{с}}{}^* = v_{\text{с}} - v_{\text{оз}} = \left(\sqrt{2} - 1\right) v_{\text{оз}}. \qquad (5.30)$$

Приравниваем кинетическую энергию ракеты на поверхности Земли (после отработки реактивного двигателя) сумме кинетической энергии по преодолению поля тяготения Земли и кинетической энергии по преодолению поля тяготения Солнца, куда подставляем скорость (5.30)

$$v_3^2 = v_2^2 + (v_{\text{с}}{}^*)^2 \ \rightarrow v_3 = \sqrt{v_2^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v_{\text{оз}}^2} \cong 16.65 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \qquad (5.31)$$

В (5.29) подставили значения $v_{\text{оз}}$= 29,78 км/с, v_2= 11,18 км/с.

О законах Кеплера. Первый и второй законы Кеплера требуют решения дифференциального уравнения движения планеты в центральном поле тяготения Солнца. Такие решения получены, например, в курсе физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, т. 1, «Механика», Глава III. Эллиптические орбиты планет, обращающихся вокруг Солнца, мало отличаются от круговых. Это позволяет наиболее просто интерпретировать третий закон Кеплера. В самом деле, разделим длину орбиты на скорость орбитального движения планеты (5.29)

$$T = \frac{2\pi R_{\text{оз}}}{v_{\text{оз}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M_c}} (R_{\text{оз}})^{3/2} \ \rightarrow \ T^2 = \frac{(2\pi)^2}{\gamma M_c} (R_{\text{оз}})^3. \qquad (5.32)$$

Возведя в квадрат, получим третий закон Кеплера. Коэффициент пропорциональности действительно не зависит от параметров планеты.

Вопросы к главе 5

1. Дать определение угла. Что такое угол в 1 радиан? Привести формулы перевода радианной меры угла в градусы и наоборот.

2. Почему при движении точки по окружности координаты точки даются периодическими функциями Sin и Cos?

3. Что такое фаза, что такое начальная фаза? Каким приемом начальная фаза убирается из формул?

4. Для движения точки по окружности получить скорости ее движения вдоль осей координат. Чему равен модуль вектора скорости? Почему линейная скорость точки не зависит от ее фазы? Куда направлен вектор линейной скорости?

5. Для движения точки по окружности получить компоненты вектора ускорения вдоль осей координат. Чему равен модуль вектора ускорения? Куда направлен вектор ускорения? Почему ускорение называют центростремительным?

6. Получить выражение для 1-й космической скорости. Чему равна эта скорость?

7. Получить выражение для 2-й космической скорости. Чему равна эта скорость?

8. Вывести формулу для 3-й космической скорости.

ГЛАВА 6. ПЕРВЫЙ ЗАКОН СТАТИКИ

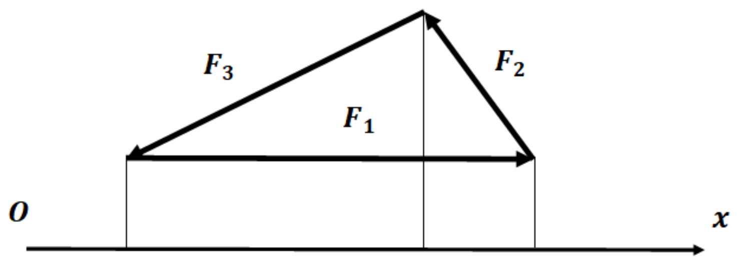
Статика *– это наука о состоянии равновесия физических тел.*

Большинство тел, с которыми нам приходится иметь дело, находятся в состоянии равновесия. Такие тела покоятся относительно Земли, то есть, никуда не двигаются. В то же время на такие тела действуют силы. В любом случае физические тела обладают весом, поэтому на них действует вес и сила реакции опоры со стороны других тел, на которые они опираются. Нас окружают здания, сооружения, мосты, башни, виадуки, арки, тоннели и т.п. строения. При их строительстве обязательно учитываются законы статики. Займемся их изучением.

Первый закон статики. *Сумма сил действующих на физическое тело, находящееся в состоянии покоя, равна нулю.* Запись данного закона имеет вид

$$\sum_k \boldsymbol{F_k} = 0. \tag{6.1}$$

Суммирование ведется по всем силам, действующим на физическое тело. Силы являются векторами, поэтому в (6.1) фигурирует векторная сумма. Для наглядности на рис. 6.1 представлено векторное суммирование трех сил.



$$\boldsymbol{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0}$$

Рис. 6.1. Сумма проекций сил, удовлетворяющих первому закону статики, на любое направление равна нулю

Утверждение (6.1) непосредственно связано с законами Ньютона. Во-первых, физическое тело обязательно должно рассматриваться в инерциальной системе отсчета. Во-вторых, в первом законе Ньютона сказано, что если сумма сил, действующих на тело равна нулю, то тело может покоиться. Второй закон Ньютона подтверждает высказанное утверждение математически. Мы рассматривали этот вопрос в главе 2. По существу, 1-й закон статики является частью формулировки 1-го закона Ньютона.

Сумма (6.1) представляет собой нулевой вектор. Естественно, что для нулевого вектора справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. Сумма п*роекций сил, удовлетворяющих первому закону Статики, на любое направление равна нулю.* Проекция вектора на направление также является вектором. Она обладает начальной и конечной точками.

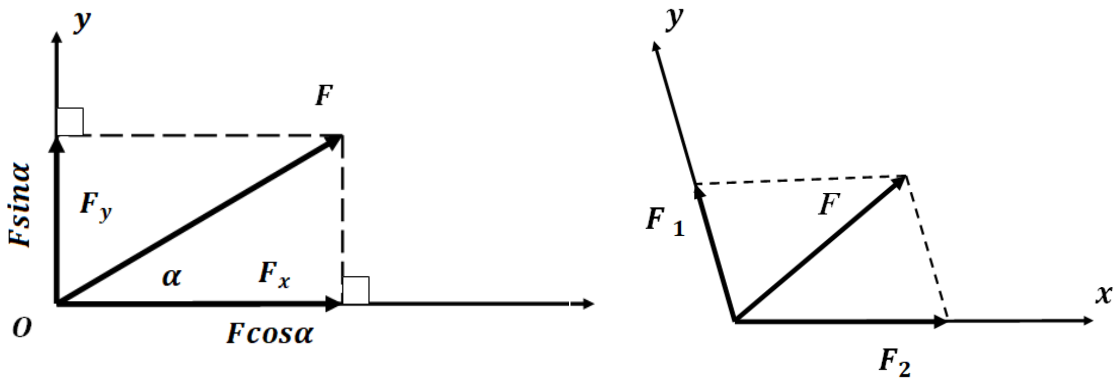
Следствие 2. *В условиях равновесия физического тела любую силу, действующую на него, можно разложить на две или несколько компонент, векторная сумма которых равна исходной силе.* Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (6.1). В самом деле, возьмем любые два вектора, которые обращают в ноль векторную сумму

$$-\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_{11}} + \boldsymbol{F_{12}} = 0. \tag{6.2}$$

Прибавим далее (6.2) к (6.1). Получим

$$\boldsymbol{F_{11}} + \boldsymbol{F_{12}} + \sum_{k=2} \boldsymbol{F_k} = 0. \tag{6.3}$$

Первый закон статики не изменился, однако, вектор $\boldsymbol{F_1}$ поменялся на сумму своих компонент $\boldsymbol{F_{11}} + \boldsymbol{F_{12}}$.



а б

Рис. 6.2. Разложение силы: а) на две ортогональные компоненты, б) на две произвольные компоненты

Следует отметить, что разложение сил справедливо в классической механике не только в статическом случае, но и в произвольном случае. Это связано с линейностью уравнений динамики Ньютона относительно сил.

Принцип суперпозиции сил в физике

Разложение сил на компоненты является проявлением фундаментального принципа суперпозиции сил в физике. Этот принцип справедлив в классической механике и классической теории электромагнитных явлений (электродинамике). Он выполняется в том случае, если уравнения соответствующих теорий являются линейными относительно описываемых взаимодействий.

Если рассматривается электродинамика не в вакууме, а в какой-либо среде, то принцип суперпозиции может нарушаться. Так, например, если диэлектрическая проницаемость или намагниченность среды нелинейно зависят от приложенного поля, это приводит к нелинейным поправкам в уравнениях Максвелла. Прямым следствием этого является нарушение принципа суперпозиции в такой нелинейной среде.

Так, например, два луча света, распространяющиеся в нелинейной среде, могут изменять траекторию друг друга. Более того, даже один луч света в нелинейной среде может воздействовать сам на себя и изменять свои характеристики. Многочисленные эффекты такого типа изучает нелинейная оптика.

Принцип суперпозиции нарушается также в вакууме при учете квантовых явлений. В квантовой электродинамике фотон может на некоторое время превратиться в электрон-позитронную пару, которая уже может взаимодействовать с другими фотонами. Эффективно это приводит к тому, что фотоны могут взаимодействовать друг с другом. Такого типа процессы наблюдались экспериментально.

Тот факт, что уравнения классической электродинамики (уравнения Максвелла) линейны, является скорее исключением, чем правилом. Многие фундаментальные теории современной физики являются нелинейными. Например, квантовая хромодинамика – фундаментальная теория сильных взаимодействий – нелинейна по построению. Это приводит к сильнейшему нарушению принципа суперпозиции в решениях.

Другим известным примером нелинейной теории является общая теория относительности. В ней также не выполняется принцип суперпозиции. Например, гравитационное поле Солнца влияет не только на Землю и Луну, но также и на гравитационное взаимодействие между Землей и Луной.

Наконец, принцип суперпозиции не выполняется, когда речь идет о взаимодействии атомов и молекул. Это можно пояснить следующим образом. Рассмотрим два атома, связанных общим электронным облаком. Поднесем теперь точно такой же третий атом. Он как бы оттянет на себя часть связывающего атомы электронного облака, и в результате энергия связи между первоначальными атомами изменится.

Разрыв проводов при обледенении

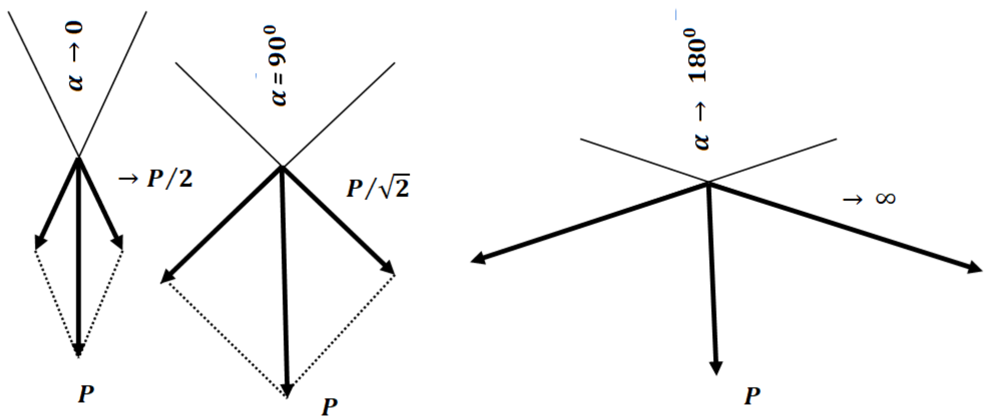


Рис. 6.3. Разложение сил при провисании проводов

Все мы знаем, что при обледенении провода могут порваться. Отчего это происходит? На рис. 6.3 показано разложение силы тяжести при различных углах провисания проводов. При малых углах (когда есть запас длины провода между подвесами) нагрузка вдоль провода порядка $P/2$, при угле, равном прямому – $P/\sqrt{2}$, при больших углах, (когда нет запаса длины провода на пролете) нагрузка вдоль проводов возрастает вплоть до бесконечности. Именно по этой причине рвутся провода даже при небольших дополнительных нагрузках. Конечно, рассматривать задачу с точкой излома провода не вполне корректно. Строгое решение найдено в курсе Сопромата. Оно является непрерывным между точками подвеса проводов.

Дополнительные условия к первому закону статики

Более внимательное рассмотрение первого закона статики приводит к выводу, что этот закон требует постановки дополнительных условий. Он не является самодостаточным для того, чтобы тело находилось в состоянии равновесия.

Первое дополнительное условие. *В случае, когда на физическое тело действуют две силы, они должны лежать на одной линии, в противном случае, физическое тело начнет вращаться.* На рис. 6.4 A и B точки приложения сил F_1 и F_2. Показано, что линии действия этих сил должны совпадать.

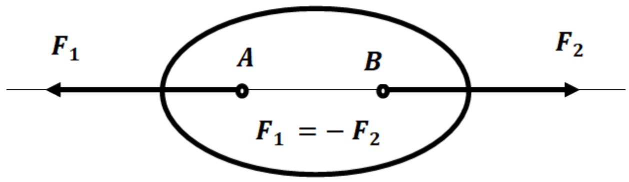


Рис. 6.4. Две силы должны действовать вдоль одной линии

Второе дополнительное условие. *Если на физическое тело действуют три силы, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке.*

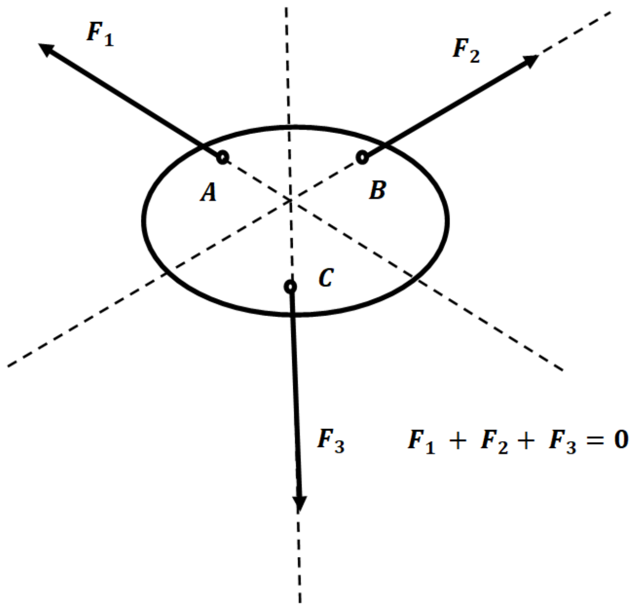


Рис. 6.5. Линии действия для трех сил
должны пересекаться в одной точке

Отметим также, что точку приложения силы можно перемещать вдоль линии действия силы.

Количество дополнительных условий можно увеличивать. Однако, мы на этом остановимся и в следующей главе сформулируем закон, при выполнении которого физическое тело не будет вращаться.

Твердое тело на наклонной плоскости

Наклонная плоскость является простым механизмом, который позволяет уменьшить усилие по перемещению тела на заданную высоту. Рассмотрим рис. 6.6. Показана наклонная плоскость с углом α при основании. Считаем наклонную плоскость абсолютно гладкой, без шероховатостей. На наклонной плоскости находится груз, имеющий массу M, который нитью, перекинутой через блок, соединен с грузом массы m.

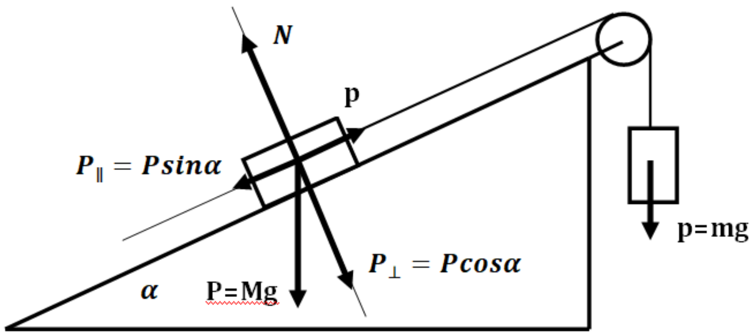


Рис. 6.6. Задача о равновесии груза на наклонной плоскости

Определить величину массы m, которая удержит груз на наклонной плоскости в состоянии равновесия.

Рассмотрим баланс сил в центре тяжести груза на наклонной плоскости. Вес груза $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ разложим на две ортогональные компоненты, параллельную наклонной плоскости $P_{\parallel} = Psin\alpha$ и перпендикулярную наклонной плоскости $P_{\perp} = Pcos\alpha$, см. рис. 6.6. Перпендикулярную компоненту скомпенсирует сила реакции опоры N. Параллельную компоненту веса должен компенсировать вес малого груза, перекинутый через блок. Этот вес через силу натяжения нити передастся на большой груз, параллельно наклонной плоскости. В результате имеем два соотношения

$$\begin{cases} N = Pcos\alpha, \\ mg = Mgsin\alpha. \end{cases} \tag{6.4}$$

Из второго соотношения получаем ответ на поставленный вопрос

$$m = Msin\alpha. \tag{6.5}$$

Таким образом, наклонная плоскость позволяет уменьшить усилие по подъему груза на высоту.

Усложним задачу, рис. 6.7. Здесь на груз на наклонной плоскости действует сила натяжения нити под углом β. Ее также следует разложить на две компоненты, параллельную и перпендикулярную к наклонной плоскости. Получим следующую систему уравнений на оси системы координат перпендикулярную и параллельную к наклонной плоскости

$$\begin{cases} N + psin\beta = Pcos\alpha, \\ mgcos\beta = Mgsin\alpha. \end{cases} \tag{6.6}$$

Условие равновесия будет

$$\begin{cases} Mcos\alpha - msin\beta > 0, \\ mcos\beta = Msin\alpha. \end{cases} \tag{6.7}$$

Неравенство возникает из-за того, что сила реакции опоры должна быть больше нуля, иначе груз оторвется от наклонной плоскости. Исключив массу из неравенства получим условия равновесия

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) > 0, \\ mcos\beta = Msin\alpha. \end{cases} \tag{6.8}$$

Или

$$\begin{cases} 0 < \alpha + \beta < \pi/2, \\ mcos\beta = Msin\alpha. \end{cases} \tag{6.9}$$

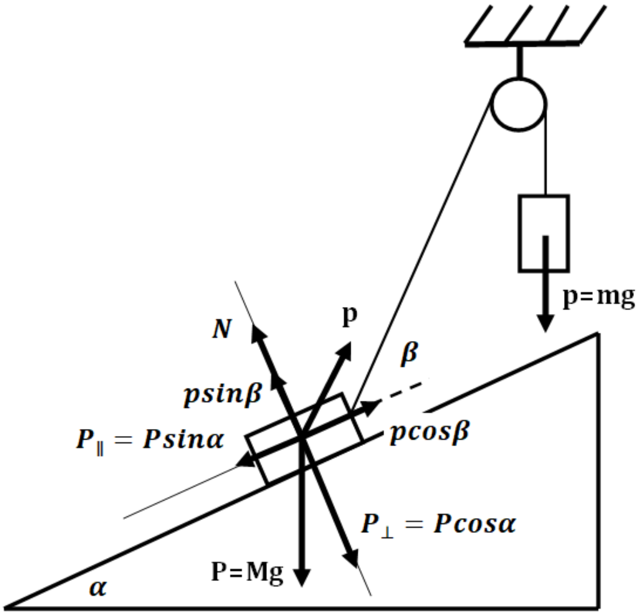


Рис. 6.7. Задача о равновесии груза на наклонной плоскости

Система двух подвесов. Рассмотрим задачу, представленную на рис. 6.8. Требуется найти угол отклонения нити от вертикали и силу натяжения нити. В системе действуют три силы: веса двух грузов и сила натяжения нити на участке, где нить наклонена. Здесь общей точкой пересечения линий действия трех сил является точка А. Перенесем начала векторов всех трех сил вдоль линий действия в точку А. Сумма трех сил в соответствии с первым законом статики равна нулю

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}. \tag{6.10}$$

Запишем две проекции векторного уравнения (6.10) на ось x, параллельную Земле, и на ось y, перпендикулярную Земле

$$\begin{cases} mg = Tsin\alpha, \\ Mg = Tcos\alpha. \end{cases} \tag{6.11}$$

Поделив первое уравнение на второе получим уравнение для определения угла

$$tg\alpha = \frac{m}{M} \rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{m}{M}\right). \tag{6.12}$$

Для определения силы натяжения нити следует использовать тригонометрическое тождество

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha} \quad \rightarrow cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{6.13}$$

Получим

$$T = \frac{Mg}{cos\alpha} = Mg\sqrt{1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2}. \qquad (6.14)$$

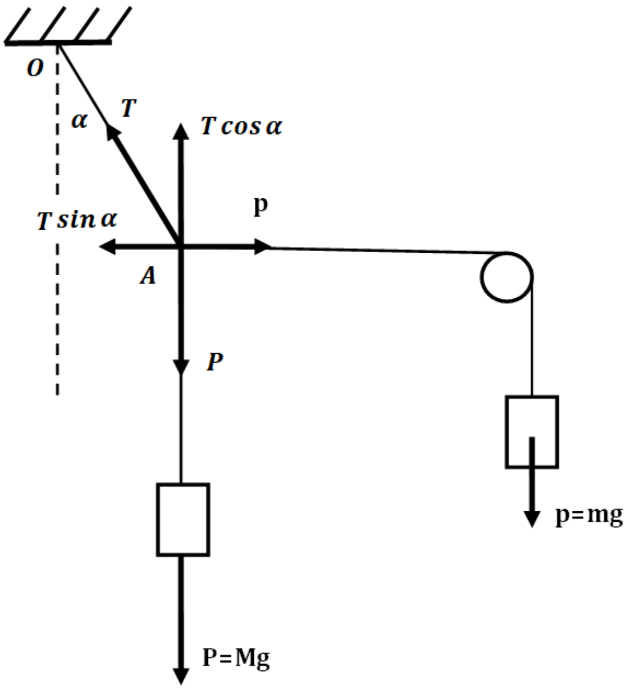


Рис. 6.8. Задача о двух подвесах, находящихся в равновесии

Вопросы к главе 6

1. Сформулируйте первый закон статики.
2. Сформулируйте два следствия из 1-го закона статики.
3. Сформулируйте дополнительные условия к 1-му закону статики.
4. Почему справедлив принцип суперпозиции сил в механике?
5. Разложите вес твердого тела, находящегося на наклонной плоскости на две ортогональные компоненты.
6. Какой выигрыш дает использование наклонной плоскости?

ГЛАВА 7. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ОСИ

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг одной оси. На рис. 7.1 дан поперечный разрез твердого тела. Ось вращения перпендикулярна рисунку и обозначена точкой О. В точке А к телу приложена сила $\boldsymbol{F}$, которая его раскручивает. Отметим, что вокруг одной оси вращаются многие тела в технике. К ним относятся, например, ротор паровой или газовой турбины, ротор электрического генератора, вал электродвигателя, насоса, двигателя внутреннего сгорания, колесо машины, мотоцикла, велосипеда и др.

В точку А проведем радиус-вектор $\boldsymbol{r}$. На линию действия силы опустим перпендикуляр, длину которого обозначим буквой l. Силу $\boldsymbol{F}$ разложим на две компоненты – параллельную $\boldsymbol{F}_{\parallel}$ и перпендикулярную $\boldsymbol{F}_{\perp}$ радиус-вектору. Угол между радиус-вектором и силой обозначим буквой β. Угол между радиус-вектором и перпендикуляром на направление силы обозначим буквой α.

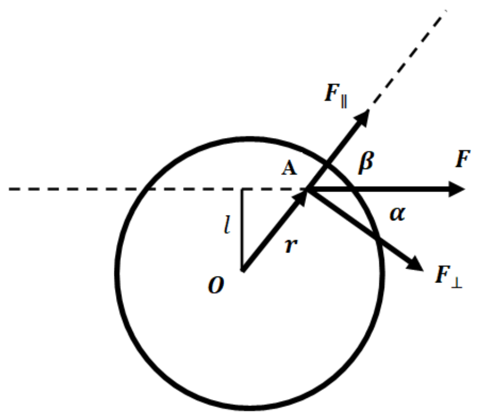


Рис. 7.1. Определение модуля момента силы

***Плечо силы** – это длина перпендикуляра, опущенного из центра вращения на линию действия силы.*

***Модуль момента силы** – это произведение модуля силы на плечо силы.*

Запишем выражение для модуля момента силы M. Напомним, что жирным шрифтом мы обозначаем векторы, обычным шрифтом обозначаем скаляры, которыми являются также модули векторов.

$$M = Fl = Frcos\alpha = rF_{\perp}. \qquad (7.1)$$

Учтем, что

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \qquad (7.2)$$

Поскольку сумма этих двух углов равна прямому углу между радиус-вектором и $\boldsymbol{F}_{\perp}$. Подставив в (7.1) угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, получим

$$M = rFsin\beta. \qquad (7.3)$$

Дальнейшее изложение потребует использования такого понятия векторной алгебры, как векторное произведение. Краткое определение векторного произведения можно посмотреть в прил. 2. Подробности в любом курсе векторной алгебры.

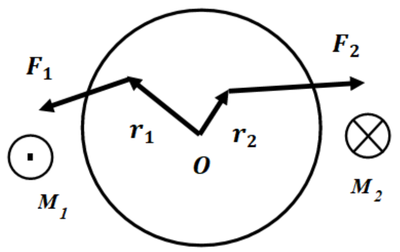
Момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора и вектора силы.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \quad (7.4)$$

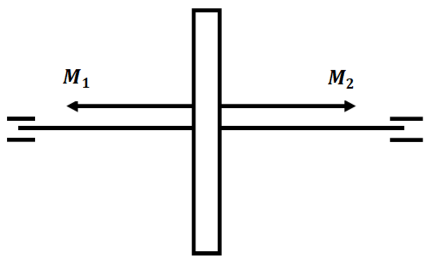
Таким образом, ***вектор момента силы*** *равен векторному произведению радиус-вектора* $\boldsymbol{r}$ *и вектора силы* $\boldsymbol{F}$. *Поэтому модуль момента силы дается формулой (7.3), вектор момента силы перпендикулярен векторам* $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{r}, \boldsymbol{F},$ *и направлен таким образом, чтобы с его кончика вращение от радиус-вектора к вектору силы осуществлялось против часовой стрелки.*

На рис. 7.2 показано действие двух сил на вращающееся тело. Запишем выражения для двух моментов, вызываемых этими силами $\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2}$. Оба момента в соответствии с п. 2 определения векторного произведения перпендикулярны плоскости рисунка, т.е. направлены вдоль оси вращения.

Для того чтобы указывать направление вектора, перпендикулярного плоскости рисунка, физиками предложены специальные обозначения в виде кружка с точкой посредине и кружка с крестиком. Они соответствуют кончику стрелы в первом случае, если на него смотреть сверху, и оперению стрелы, если на нее смотреть сзади. Кружок с точкой означает, что вектор смотрит на нас. Кружок с крестиком означает, что вектор смотрит внутрь рисунка. В соответствии с этим обозначением вектор $\boldsymbol{M_1}$ направлен на нас, а вектор $\boldsymbol{M_2}$ направлен внутрь рисунка. В условиях равновесия эти вектора моментов сил должны компенсировать друг друга $\boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{M_2} = 0$.



а



б

Рис. 7.2. Равновесие тела, закрепленного на оси под действием двух сил: а) поперечный разрез, б) вид сбоку

Второй закон статики. *Твердое тело покоится, либо вращается равномерно вокруг своей оси, если векторная сумма моментов всех сил, действующих на тело равна нулю*

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{M_k} = 0. \quad (7.5)$$

В некоторых изданиях авторы используют формулировку – «условие равновесия твердого тела, закрепленного на оси».

Отметим, что в трехмерном пространстве силы могут быть направлены в произвольном направлении. В случае тела закрепленного на оси нужно брать проекции сил на поперечную плоскость к оси и для них вычислять моменты сил, вращающие тело вокруг оси.

Отметим также, что второй закон статики применим для произвольного вращения тела в трехмерном пространстве. Если взять суммарный момент сил, действующих на твердое тело, и затем повернуть исходную систему координат так, чтобы суммарный момент проходил вдоль одной из осей новой системы координат, то в новой системе координат тело будет вращаться вокруг этой оси. Это утверждение составляет часть содержания теоремы Эйлера, согласно которой произвольное движение твердого тела можно свести к поступательному движению центра масс физического тела и вращению тела вокруг одной оси, проходящей через центр тяжести. Данные вопросы рассматриваются в курсах теоретической механики.

Центр тяжести физического тела *– это фиксированная точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести от различных элементов тела равен нулю.* Рассмотрим физическое тело, которое находится в системе координат $Oxyz$. Покроем тело трехмерной сеткой. Выберем фиксированную точку $\boldsymbol{r_0}$, которую требуется определить. Запишем суммарный момент сил тяжести от различных элементов тела в виде

$$\sum_k (\boldsymbol{r_k} - \boldsymbol{r_0}) \times \boldsymbol{g} dm_k.$$

Измельчив сетку и устремив $k \to \infty$, перейдем к интегралу, который приравняем нулю

$$\int_M (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \times \boldsymbol{g} dm = 0.$$

Разделим и умножим элемент массы dm на элемент объема, в котором эта масса сосредоточена, учтем, что $dm/_{dV} = \rho$, где ρ – локальная плотность вещества. Получим в результате

$$\int_V (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \times \boldsymbol{g} \rho(\boldsymbol{r}) dV = 0. \tag{7.6}$$

Учтем, что ускорение свободного падения есть постоянный вектор, поэтому его можно вынести за знак интеграла

$$\left[\int_V \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV - \boldsymbol{r_0}\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV\right] \times \boldsymbol{g} = 0. \tag{7.7}$$

Заметим также, что интеграл от плотности по объему равен массе физического тела

$$\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV = M. \tag{7.8}$$

Векторное произведение в (7.7) может обратиться в ноль, если векторное выражение в квадратных скобках параллельно ускорению свободного падения. В результате получаем решение уравнения (7.7)

$$\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{r_0}^* + \lambda \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{r_0}^* = \frac{1}{M}\int\limits_V \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV, \tag{7.9}$$

здесь λ – числовой параметр. Решение (7.9) представляет собой вертикальную прямую линию, проходящую через точку $\boldsymbol{r_0}^*$.

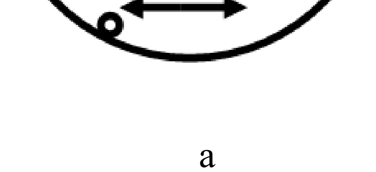
Центр масс. *Точка* $\boldsymbol{r_0}^*$ *в трехмерном пространстве, определяемая равенством (7.9), называется центром масс физического тела.*

Другое название этой точки – центр тяжести физического тела. Понятие центра масс более общее, чем центра тяжести. Центр масс существует всегда, а центр тяжести существует только в поле тяготения.

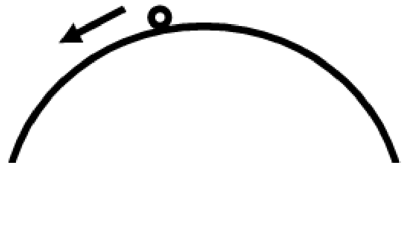
Решение (7.9) означает, что в каждой точке линии $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{r_0}^* + \lambda \boldsymbol{g}$ момент сил тяжести физического тела равен нулю. В этом смысле точка $\boldsymbol{r_0}^*$ является выделенной, она определяется только распределением масс физического тела. Точка центра масс может находиться как внутри тела, так и снаружи, если физическое тело имеет сложную форму или является составным.

Устойчивое и неустойчивое равновесие физических тел.

В статике существует еще один закон, который иногда называют ***принцип устойчивого равновесия***. *В природе реализуются только устойчивые состояния равновесия.* Примеры устойчивого и неустойчивого состояний равновесия показаны на рис. 7.3. В первом случае материальный шарик находится в потенциальной яме и малые отклонения от состояния равновесия не приводят к большим изменениям в положении шарика. На дне ямы реализуется минимальное значение потенциальной энергии в поле тяготения. Во втором случае шарик находится на макушке потенциального горба. Малое отклонение шарика от положения равновесия приведет к тому, что он скатится с горба и произойдет большое изменение в положении шарика. Во втором случае реализуется максимум потенциальной энергии в поле тяготения. Первый случай называется устойчивым равновесием, второй случай – неустойчивым равновесием механической системы.



а



б

Рис. 7.3. Равновесие шарика: а – устойчивое, б – неустойчивое

Примером устойчивого равновесия является детская игрушка – неваляшка. Как бы мы ее не отклоняли, она возвращается в исходное вертикальное состояние. Другой пример – яхта с грузом под килем. Такую яхту невозможно перевернуть волнами или ветром, она все равно поднимается и встает вертикально. Следствием принципа устойчивого равновесия является то, что мы не можем построить дом, стоящий на своем ребре, как бы нам этого ни хотелось, рис. 7.4.

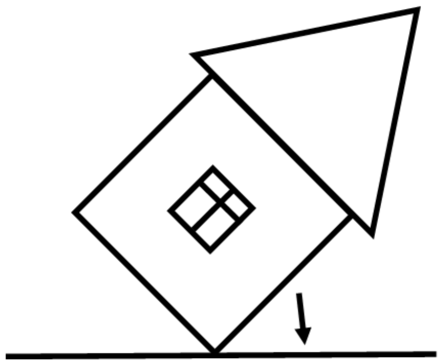


Рис. 7.4. Невозможно построить дом на ребре,
так как этому положению дома соответствует
неустойчивое состояние равновесия

Для поиска устойчивых состояний механических систем, записывают математическое выражение для потенциальной энергии системы. Затем осуществляют поиск экстремумов (минимумов и максимумов) потенциальной энергии. Методы решения задач на поиск экстремумов хорошо разработаны в высшей математике. Они называются методами оптимизации.

Простые механизмы

О наклонной плоскости мы уже сказали выше.

Рычаг является простым механизмом, при анализе которого применяется второй закон статики (7.5). Изобретатель рычага неизвестен. Всего скорее человек начал использовать рычаг, как только взял в руки палку. Рычаг – это длинный стержень с закрепленной точкой, сдвинутой к одному из концов. Примером рычага являются детские качели, рис. 7.5. К концам рычага прилагаются две силы F_1 и F_2, расстояния до точек приложения сил составляют l_1 и l_2. В условиях равновесия должны быть равны моменты сил на обоих концах рычага

$$M_1 = M_2 \;\rightarrow\; F_1\, l_1 = \; F_2 l_2. \tag{7.10}$$

Равенство (7.10) называется правилом рычага. Из (7.10) следует

$$F_2 = F_1\,\frac{l_1}{l_2}\;,\quad \frac{l_1}{l_2} < 1\,, \tag{7.11}$$

что рычаг позволяет уменьшить усилие с той стороны, с которой плечо силы длиннее. Рычаг используется в большом количестве инструментов, орудий труда и приспособлений. Принцип рычага используют лопата, тачка, лом, ножницы, плоскогубцы, консервный нож, закаточная машинка для мариновки овощей в стеклянных банках, стамеска и другие многочисленные приспособления. В технике принцип рычага используется в механических передачах, уменьшающих или увеличивающих усилие.

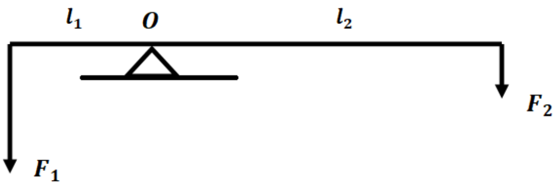
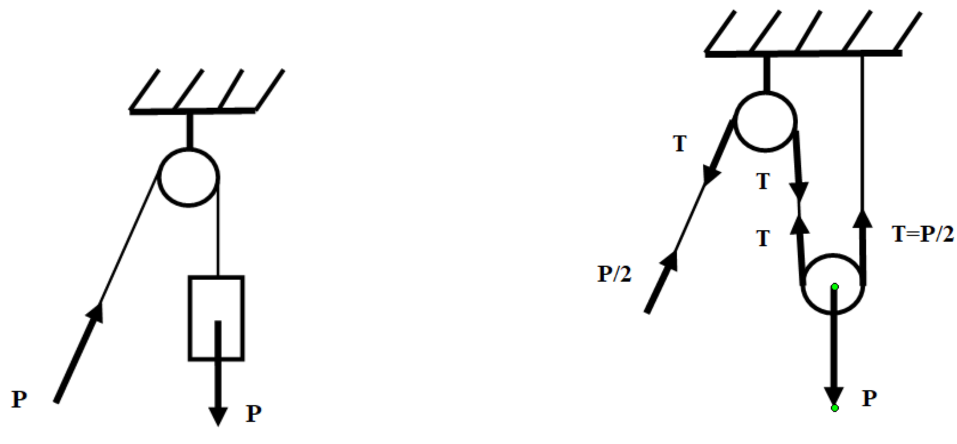


Рис. 7.5. Рычаг

Блок

Блок – это колесо на закрепленной оси, через которое перекинут шнур. При помощи такого приспособления удобно поднимать грузы. Блок, показанный на рис. 7.6 (а), не дает выигрыша в усилии. Вес груза целиком передается через силу натяжения шнура на устройство или руки человека, тянущего за веревку и поднимающего груз. Блок, показанный на рис. 7.6 (б), обеспечивает выигрыш в усилии в два раза. В такой конструкции вес груза передается на две части шнура и делится пополам. Поднимать груз легче, но придется вытянуть в два раза больше шнура, чем в случае 7.6 (а). Работа по подъему груза в обоих случаях производится одинаковая.



а б

Рис. 7.6. Блок: а – не дает выигрыша в усилии,
б – дает выигрыш в два раза

Полиспаст

Полиспаст представляет собой объединение N штук блоков типа 7.6 (б). Полиспаст позволяет уменьшить усилие по подъему груза в $2N$ раз. Полиспаст широко используется в строительных и портовых кранах, предназначенных для подъема тяжелых грузов.

Дифференциальный блок показан на рис. 7.8. Три силы T_1, T, T создают три момента, из которых два направлены в одну сторону, а один в противоположную. Сумма этих моментов должна равняться нулю

$$T_1 R + \frac{P}{2} r = \frac{P}{2} R.$$

Находим

$$T_1 = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right). \tag{7.12}$$

Дифференциальный блок уменьшает усилие по подъему груза более чем в два раза.

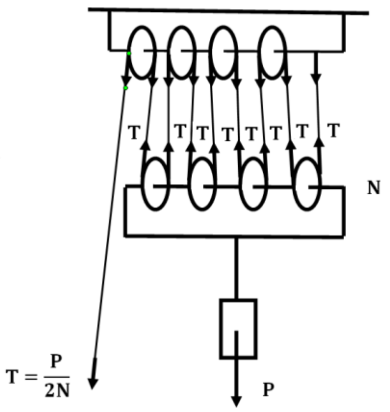


Рис. 7.7. Полиспаст

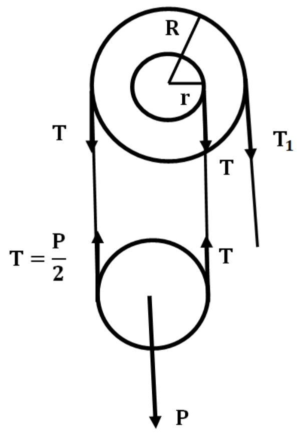


Рис. 7.8. Дифференциальный блок

Задача 1. К стене приставлена лестница длиной $l = 3$ м под углом $\alpha = 60^0$ по отношению к полу. Верхние концы лестницы закруглены. Нижние концы плоские. Вес лестницы 15 кг. На лестнице в точке, которая делит лестницу в отношении 1 : 2 начиная от стены, стоит электромонтер весом 60 кг. Найдите силу реакции опоры лестницы на пол, суммарную силу, действующую на лестницу со стороны пола и угол, между суммарной силой и силой реакции опоры на пол.

Решение. На рис. 7.9 показаны силы, которые действуют на лестницу в соответствии с условиями задачи. Так как верхние концы лестницы закруглены, то сила реакции со стороны стены $\boldsymbol{N_1}$ действует на лестницу перпендикулярно стене.

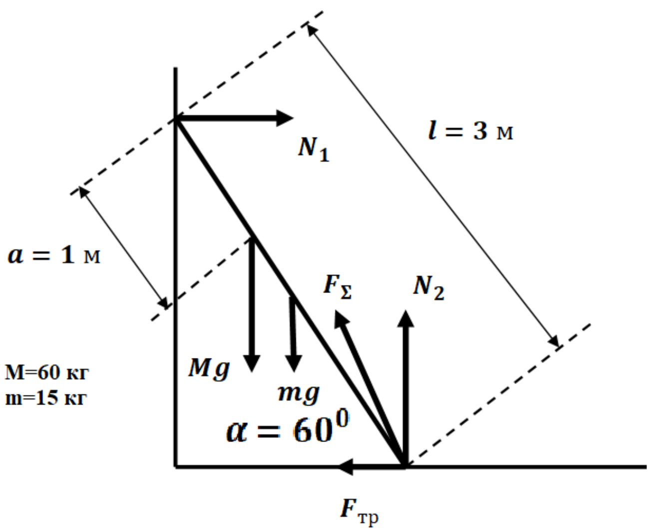


Рис. 7.9. К задаче 1

Со стороны пола на лестницу действуют две силы – сила реакции опоры на пол $\boldsymbol{N}_2$, перпендикулярно полу, и сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, параллельно полу в сторону угла между полом и стеной. Кроме того, на лестницу действуют вес электромонтера в соответствующей точке и вес лестницы на ее центр тяжести. Так как лестница находится в покое, то следует применить первый и второй законы статики (6.1) и (7.5). Первый закон даст два уравнения на направления пола и стены. Второй закон даст одно уравнение

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} - N_1 = 0, \\ (M+m)g = N_2, \\ mg\dfrac{l}{2}cos\alpha + Mg\dfrac{2l}{3}cos\alpha = N_1 lsin\alpha. \end{cases} \qquad (7.13)$$

Получили систему трех линейных уравнений. Неизвестными здесь выступают $N_1, N_2, F_{\text{тр}}$. Решая уравнения методом исключения, получим

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = \left(\dfrac{1}{2}m + \dfrac{2}{3}M\right)gctg\alpha = 275 \text{ Н}, \\ N_2 = (M+m)g = 750 \text{ Н}, \\ F_{\Sigma} = \sqrt{{F_{\text{тр}}}^2 + {N_2}^2} = 800 \text{ Н}. \end{cases} \qquad (7.14)$$

Угол между векторами F_{Σ} и N_2 составляет

$$\beta = arctg\left(\frac{F_{\text{тр}}}{N_2}\right) \cong 20^0.$$

Задача 2. Тонкий шнур, перекинутый через блок, закрепленный на вертикальном стержне длины H, с одной стороны зацеплен за конец наклонной штанги массой m. К другому концу шнура прикреплен груз массой M. Штанга может поворачиваться относительно своего конца, совмещенного с нижним концом стержня, см. рис. 7.10. Найдите условие, при котором штанга будет стоять вертикально.

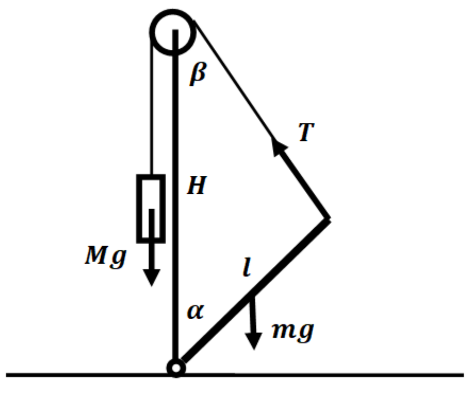


Рис. 7.10. К задаче 2

Решение. Штанга примет вертикальное положение, если момент силы натяжения шнура относительно нижнего конца штанги будет больше, чем момент силы тяжести штанги, приложенной к ее середине. Сила натяжения шнура равна весу груза $T = Mg$. Плечо силы Т относительно точки поворота

$$l_T = Hsin\beta.$$

Плечо веса штанги

$$l_m = \frac{l}{2} sin\alpha.$$

Поэтому условие вертикального положения штанги принимает вид

$$Tl_T > mgl_m \quad \rightarrow \quad MHsin\beta > \frac{1}{2} mlsin\alpha. \qquad (7.15)$$

Для треугольника, составленного вертикальным стержнем, наклонной штангой и шнуром, см. Рис. 7.10, можно записать теорему синусов

$$\frac{l}{sin\beta} = \frac{H}{sin(\pi - (\alpha + \beta))} \quad \rightarrow \quad \frac{l}{sin\beta} = \frac{H}{sin(\alpha + \beta)}. \qquad (7.16)$$

Вблизи вертикального положения

$$sin\alpha, sin\beta, sin(\alpha + \beta) \rightarrow \alpha, \beta, \alpha + \beta.$$

Это позволяет из (7.16) выразить один из углов через второй

$$\beta = \alpha \frac{l}{H - l}.$$

Подставив полученное выражение в (7.15), найдем искомое условие

$$M > m \frac{H - l}{2H}. \qquad (7.17)$$

Задача 3. Найти силу натяжения нити для конструкции, представленной на рис. 7.11.

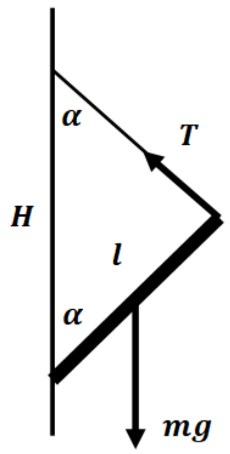


Рис. 7.11. К задаче 3

Решение. Должны быть равны моменты силы тяжести mg и силы натяжения нити T относительно нижней опорной точки штанги. Плечи указанных сил составляют $l_T = Hsin\alpha,\ l_m = \frac{l}{2} sin\alpha$. Кроме того из равнобедренного треугольника $H = 2lcos\alpha$. Поэтому

$$Tl_T = mgl_m \ \rightarrow T = \frac{1}{4} \frac{mg}{cos\alpha}. \qquad (7.18)$$

Вопросы к главе 7

1. Что такое плечо силы?
2. Дайте определение момента силы.
3. Сформулируйте второй закон статики.
4. Дайте определение центра тяжести физического тела.
5. Какие вы знаете простые механизмы?
6. Сформулируйте правило рычага.
7. В чем заключается выигрыш от использования блока? Что такое простой блок и что такое полиспаст? Как устроен полиспаст? Какой выигрыш дает полиспаст?
8. Сформулируйте принцип устойчивого равновесия в статике.

ГЛАВА 8. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Рассмотрим рычаг в виде детских качелей со смещенным центром вращения. Допустим, что качели находятся в равновесии под действием сил F_1 и F_2 на их концах. Наклоним немного качели так, что их концы пройдут расстояния s_1 и s_2, рис. 8.1.

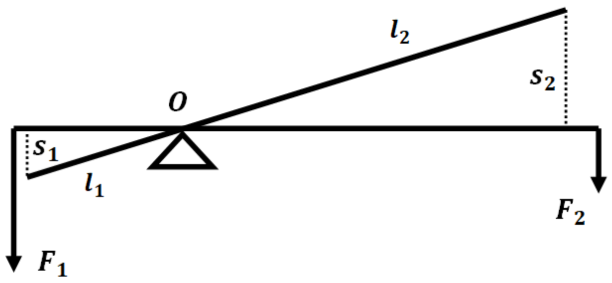


Рис. 8.1. К выводу «Золотого правила механики» для рычага

Равенство моментов сил, действующих на концы качелей, приводит к соотношению

$$M_1 = M_2 \;\; \rightarrow \;\; F_1 l_1 = F_2 l_2. \tag{8.1}$$

Из двух подобных треугольников, которые образуют горизонтально расположенные качели и наклоненные, находим соотношение подобия

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{s_1}{s_2} \;\; \rightarrow \;\; s_1 l_2 = s_2 l_1. \tag{8.2}$$

Перемножим равенства (8.1) и (8.2)

$$F_1 l_1 l_2 s_1 = F_2 l_2 l_1 s_2. \tag{8.3}$$

Сократив одинаковые сомножители $l_1 l_2$ в левой и правой частях равенства (8.3), получим

$$F_1 s_1 = F_2 s_2. \tag{8.4}$$

Равенство (8.4) показывает, что произведение силы на перемещение сохраняется на обоих концах рычага. Аналогичное соотношение имеет место для других видов простых механизмов.

Еще в глубокой древности рабы перетаскивали тяжести. Отсюда произошло слово работать, а сам процесс называли – работа. После появления науки во времена Декарта и Галилея произведению силы на перемещение типа (8.4) оставили соответствующее название – работа. В те же времена сформулировали следующее правило.

Золотое правило механики. *Работа на обоих концах простых механизмов одинакова.* Таким образом, простой механизм не может производить работу.

Элементарная работа. *Скалярное произведение вектора силы на вектор элементарного перемещения называется элементарной работой, рис. 8.1.*

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{dr}| cos\alpha = Fdrcos\alpha. \tag{8.5}$$

Наличие в формуле (8.5) $cos\alpha$ приводит к выводу, если $cos\alpha > 0$, то совершается положительная работа, если $cos\alpha < 0$, то совершается отрицательная работа, а если $cos\alpha = 0$, то и работа равна нулю. Эти выводы иллюстрирует рис. 8.2. Формула (8.5) говорит нам также, что работу совершает проекция силы на направление элементарного перемещения.

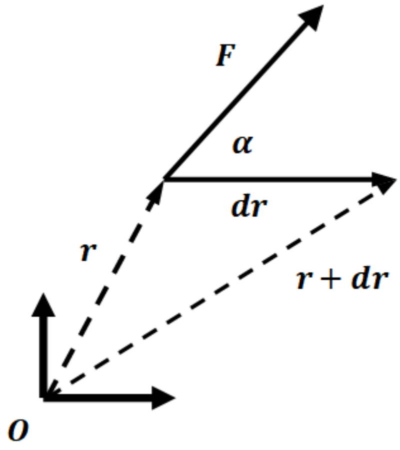


Рис. 8.2. К определению работы, формула (8.5)

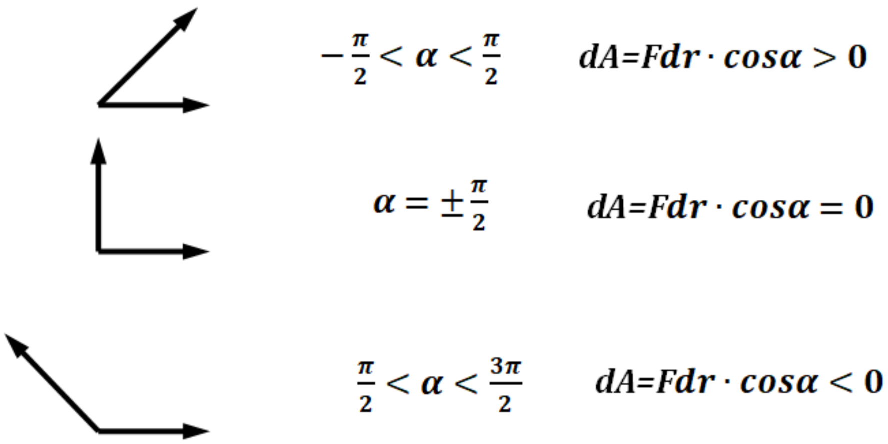


Рис. 8.3. Работа может быть положительная, отрицательная или равна нулю

Полная работа. Для того, чтобы подсчитать работу при передвижении физического тела между точками 1 и 2, нужно взять интеграл от элементарной работы по траектории движения тела

$$A = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr}. \tag{8.6}$$

Интеграл по траектории вычисляется следующим образом $\text{A} = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x, y, z)dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y(x, y, z)dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z(x, y, z)dz.$ (8.7)

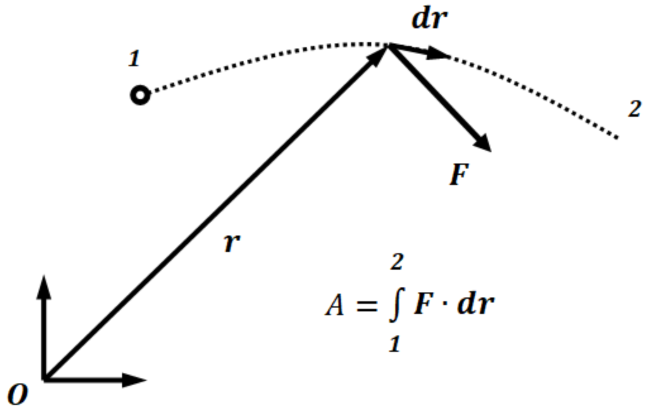


Рис. 8.4. Работа есть интеграл по траектории движения тела

Приведем примеры. При падении камня с высоты на землю сила тяжести совершает положительную работу. При торможении автомобиля сила трения в тормозных колодках совершает отрицательную работу. Сила упругости пружины, толкая шар совершает положительную работу, шар, сжимающий пружину совершает отрицательную работу, сила тяготения Земли, действующая на спутник, движущийся по круговой орбите вокруг планеты, не совершает работы.

Единицей измерения работы в системе СИ является Джоуль, в системе СГС эрг

$$1\,\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot 1\text{м}, \quad 1\text{эрг} = 1\text{дина} \cdot 1\text{см}, \qquad 1\text{Дж} = 10^7\text{эрг}. \qquad (8.8)$$

Движение пешехода по горизонтальной плоскости. Пешеход на горизонтальной плоскости движется перпендикулярно силе тяжести. Вроде бы работа против силы тяжести должна равняться нулю. Однако при ходьбе пешеход устает, потому что все-таки совершает работу. Как это происходит? Посмотрим на рис. 8.5. На нем представлена траектория центра тяжести человека при ходьбе по горизонтальной плоскости. На каждом шаге человек перекатывает ступню одной ноги с пятки на носок, при этом центр тяжести поднимается на 4–6 см в зависимости от роста человека. На этом этапе мускулы ноги человека совершают работу против силы тяжести. На втором этапе человек делает шаг. При этом центр тяжести пешехода понижается по наклонной линии на те же 4–6 см. Сила тяжести совершает положительную работу. Она затрачивается на трение обуви человека о дорогу. Трется также ступня человека о внутреннюю часть обуви. Кроме того, возникают мышечные усилия по демпфированию веса человека, сопровождающиеся выделением тепла в организме человека. В результате протирается подошва ботинка, стирается внутренняя часть обуви, образуются мозоли на ногах, человек разогревается и потеет. Испарение влаги с кожи человека является механизмом остывания разогретого человеческого тела.

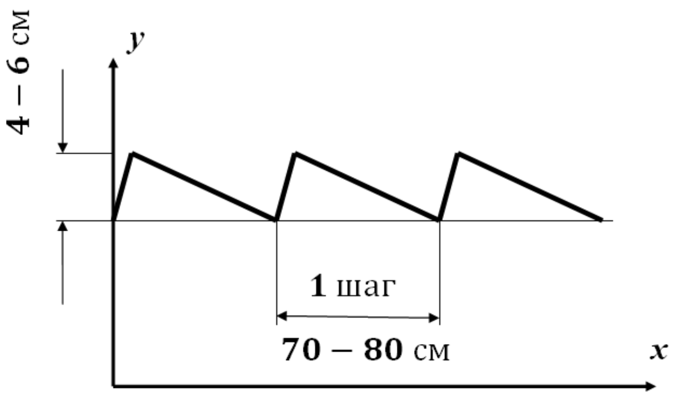


Рис. 8.5. Траектория центра тяжести пешехода

Работа по подъему груза по наклонной плоскости. Подсчитаем работу, которую совершает рабочий перемещающий груз массой M по наклонной плоскости на высоту h, рис. 8.6. Угол между наклонной плоскостью и горизонтальной поверхностью обозначим буквой α. Работа совершается против силы тяжести груза $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$, направленной вертикально вниз. Для подсчета работы совершаемой рабочим применим формулу (8.5) со знаком минус, который появляется из-за того, что рабочий толкает груз с силой противоположно направленной скатывающей компоненте веса груза. В данной задаче брать интеграл не нужно, достаточно в формуле (8.5) взять полное перемещение груза $s = h/sin\alpha$.

$$A = -P\frac{h}{sin\alpha}cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = Mgh. \tag{8.9}$$

Важным обстоятельством является независимость совершаемой работы от угла наклонной плоскости. Работа зависит только от высоты груза над поверхностью Земли.

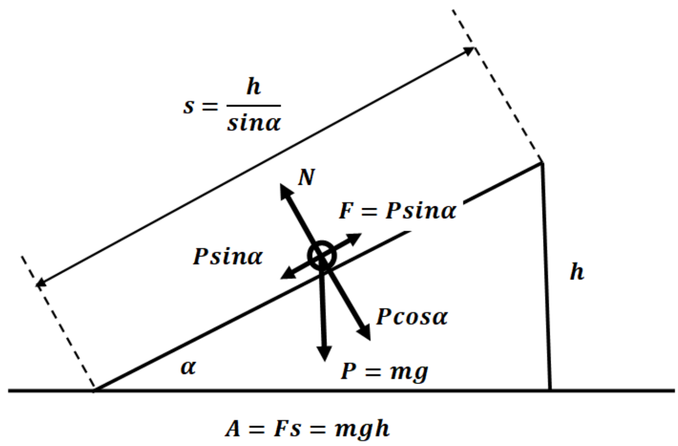


Рис. 8.6. Вычисление работы по подъему груза
по наклонной плоскости на высоту h

Ученые давно заметили, что совершаемую работу можно накапливать и затем высвобождать в другом месте и в другой момент времени. Бревно можно закатить на холм и дать ему скатиться через несколько дней с другой стороны холма. Тетиву лука можно натянуть и затем через некоторое время выстрелить из лука в нужном направлении. Воду можно накопить в горах и затем спускать ее по наклонному виадуку в город у подножия гор. Давид убил Голиафа камнем, выпущенным из пращи, причем камень попал в Голиафа в конечной точке своей траектории через некоторое время после броска. Отреставрировав икону конца XIV в., художники с изумлением обнаружили на ней панораму Куликовской битвы с применением огнестрельного оружия. В связи с этим легенда о поединке Пересвета и Челубея предстает в совершенно новом свете. Похоже, что Пересвет попросту застрелил Челубея из самопала – первого пистолета. Прозвища участников соответствующие. «Убитый в чело» и создающий «периодический свет» при выстрелах, конечно. Пуля, выпущенная из огнестрельного оружия, обладает теми же свойствами, что и стрела, выпущенная из лука. В связи со сказанным, мы подходим к определению энергии в механике.

***Энергия** – это накопленная работа.* Примерами механизмов, при помощи которых можно запасать работу, являются сжатая пружина, водонапорная башня, натянутый лук со стрелой, груз, поднятый над поверхностью Земли, огнестрельное и газовое оружие и т.д.

Запасти работу можно двумя способами.

1) Можно выгодно расположить физические тела или их части в пространстве воздействуя на них силами. Этот вид накопленной работы получил название **потенциальная энергия**.

Сжимая пружину, мы изменяем положение частей пружины в пространстве. Сжатая пружина обладает потенциальной энергией. Поднимая груз на некоторую высоту, мы также изменяем его положение в пространстве. Поднятый на некоторую высоту груз обладает потенциальной энергией в поле тяготения планеты.

2) Можно разогнать физическое тело внешней силой, увеличив его скорость. Этот вид запасенной работы получил название **кинетическая энергия**.

Пуля приобретает кинетическую энергию в результате ее разгона пороховыми газами в стволе ружья. Стрела приобретает скорость в процессе разгона сжимающейся тетивой. Машина на шоссе приобретает кинетическую энергию в результате работы двигателя внутреннего сгорания.

Потенциальная энергия сжатой пружины

Определим потенциальную энергию сжатой пружины. Введем ось координат Ox так, чтобы точка O отмечала конец пружины в отсутствие действия сил. Медленно сожмем пружину внешней силой F, действующей в отрицательную сторону оси Ox. Со стороны пружины на сжимающий предмет действует сила упругости, носящая имя Гука

$$F_{\text{г}} = -kx. \tag{8.10}$$

Так как $x < 0$, то сила Гука направлена в положительную сторону оси Ox. В соответствие с третьим законом Ньютона внешняя сила равна силе Гука, но направлена в сторону отрицательных значений x

$$F = -F_{\text{г}} = kx. \tag{8.11}$$

Подсчитаем работу, которую производит внешняя сила

$$dA = kxdx \;\rightarrow\; A = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2. \tag{8.12}$$

Работу, накопленную при сжатии пружины внешней силой, мы называем потенциальной энергией сжатой пружины

$$A = U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{8.13}$$

Потенциальная энергия материальной точки в поле тяготения Земли

Если материальная точка находится поблизости от поверхности Земли и ее перемещение осуществляется на небольшое расстояние по сравнению с радиусом планеты, то работа по перемещению массы с поверхности планеты дается формулой (8.9). Если перемещение осуществляется уже с некоторой высоты, то запасаемая работа, равная изменению потенциальной энергии, составит

$$A = \Delta U = Mg\Delta \mathrm{h}. \tag{8.14}$$

Рассмотрим случай, когда перемещение материальной точки сравнимо с радиусом Земли или превосходит его. Направим ось Or так, чтобы точка O соответствовала центру Земли. Подсчитаем работу, которую надо совершить внешней силой, чтобы удалить материальную точку из положения $r > R_з$ на бесконечность, т.е. за пределы поля тяготения Земли. Эта работа дается интегралом типа (5.24)

$$A = \gamma M_з m \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \gamma M_з m \int_r^\infty d\left(-\frac{1}{r}\right) = \gamma \frac{M_з m}{r}. \tag{8.15}$$

Формула (8.15) позволяет ввести новое понятие.

Потенциал *поля тяготения Земли это работа по перемещению внешней силой 1 кг массы из бесконечности на расстояние $r > R_з$ от центра Земли*

$$U(r) = -\gamma \frac{M_з}{r}. \tag{8.16}$$

Понятие потенциала позволяет легко вычислять работу внешней силы при медленном (квазистатическом) перемещении материальной точки между ее начальным и конечным положением.

$$A_{12} = m\Delta U_{12} = m(U_2 - U_1) = -\gamma M_з m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{8.17}$$

Для того, чтобы перейти к работе, совершаемой силой тяготения, нужно поменять знак в (8.16) и (8.17). Для перевода космического аппарата с более низкой орбиты на более высокую внешняя сила (реактивный двигатель) должна совершить положительную работу, что и дает формула (8.17).

Отметим также, что работа (8.17) не зависит от вида траектории, переводящей материальную точку из одного положения в другое. Она зависит только от координат начального и конечного положения материальной точки.

Кинетическая энергия

Рассмотрим разгон точечной массы (частицы) внешней силой. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$

Выписываем выражение для элементарной работы

$$dA = Fdx = m\frac{dv}{dt}dx = m\frac{dx}{dt}dv = mvdv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \qquad (8.18)$$

Интегрируем левую и правую части равенства (8.18) по A от нуля до $A(v)$ и по скорости от нуля до v

$$A = \frac{1}{2}mv^2. \qquad (8.19)$$

Видим, что при разгоне частицы внешней силой произведена работа (8.19). Ее и называют кинетической энергией частицы. Кинетическую энергию обычно обозначают буквами W или K.

Кинетическая энергия частицы в трехмерном пространстве

Формула (8.19) получена для случая разгона частицы вдоль одной оси системы координат. Рассмотрим теперь общий случай трехмерного пространства. Выписываем второй закон Ньютона в произвольном случае

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Выписываем векторное выражение (8.5) для работы

$$dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot d\boldsymbol{r} = md\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = m\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = m\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right) =$$
$$\frac{1}{2}m\left(d{v_x}^2 + d{v_y}^2 + d{v_z}^2\right) = \frac{1}{2}md\left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right) = \frac{1}{2}md|\boldsymbol{v}|^2 \equiv \frac{1}{2}mdv^2$$
$$= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

В результате приходим к выражению (8.19), в котором под v понимается длина вектора скорости частицы (модуль скорости).

Мощность производимой работы – *это работа, выполняемая в единицу времени*.

Получим выражение для мощности. Для этого нужно выражение (8.5) разделить на dt

$$Q = \frac{dA}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2\right). \qquad (8.20)$$

Получается, что мощность производимой работы равна скорости изменения кинетической энергии частицы.

Законы сохранения импульса и энергии в механике

Громкое название «законы» не соответствует своему смыслу в механике. «Законы» являются следствиями уравнений динамики Ньютона. «Законы» сохранения называют также интегралами движения системы уравнений динамики Ньютона. Всего таких интегралов 3, один скалярный и два векторных. Так что количество скалярных интегралов движения 7. Знание этих интегралов позволяет упростить решение многих задач механики.

Рассмотрим уравнение движения для одной частицы в форме, о которой уже говорилось ранее (см. конец главы 1)

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{8.21}$$

Очевидно, если сила $\boldsymbol{F}$**,** действующая на частицу, равна нулю, то импульс сохраняется $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_0}$. Если мы имеем систему, состоящую из нескольких частиц, и просуммируем уравнения второго закона Ньютона для всех частиц, то суммарный импульс будет сохраняться при условии, что сумма всех сил, действующих на частицы, будет равна нулю. В соответствии с третьим законом Ньютона такая сумма всегда обнуляется, если система частиц является замкнутой, как говорят – консервативной. Консервативная система не находится под воздействием внешних сил. Таким образом

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{F_i} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \boldsymbol{p_i}\right),$$

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{F_i} = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p_i} = Const. \tag{8.22}$$

Соотношение (8.22) и называют «законом» сохранения импульса в механике.

Перепишем (8.21) в виде

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{8.23}$$

Во многих задачах силу можно представить в виде градиента (производной в трехмерном пространстве) по радиус-вектору от некоторой скалярной функции $U(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}). \tag{8.24}$$

Подставляем (8.24) в (8.23)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}). \tag{8.25}$$

(8.25) можно преобразовать к виду

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}U(\boldsymbol{r}). \tag{8.26}$$

В левой части (8.25) стоит скалярное произведение векторов. Аналогично тому как это проделано в (8.20)

$$d\left(\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U(\boldsymbol{r})\right) = 0. \tag{8.27}$$

Из (8.27) получаем соотношение, которое называют «законом» сохранения энергии

$$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U(\boldsymbol{r}) = Const. \tag{8.28}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии частицы при ее движении в потенциальном поле (8.24) сохраняется.

Сила Гука является потенциальной

$$F = -kx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right). \tag{8.29}$$

Сила тяготения также является потенциальной

$$F = -\gamma\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\boldsymbol{n} = -m\boldsymbol{\nabla}\left(-\gamma\frac{M}{|\boldsymbol{r}|}\right). \tag{8.30}$$

Поэтому в задачах с пружинами и движением материальных тел в полях тяготения выполняется закон сохранения энергии.

Как видим, законы сохранения не вытекают из опыта, а являются интегралами уравнений движения Ньютона. Указанные интегралы изучали известные математики – Лагранж, Гамильтон, Якоби, Эмми Нетер.

О законе сохранения момента импульса (количества вращения) мы расскажем в следующей главе.

Задача 1. В вертикальную трубку конструкции, показанной на рис. 8.7 бросают с нулевой скоростью шарик массой m. Масса конструкции M. Найти скорость v относительно стола, с которой шарик вылетит из горизонтальной трубки конструкции. Стол абсолютно гладкий.

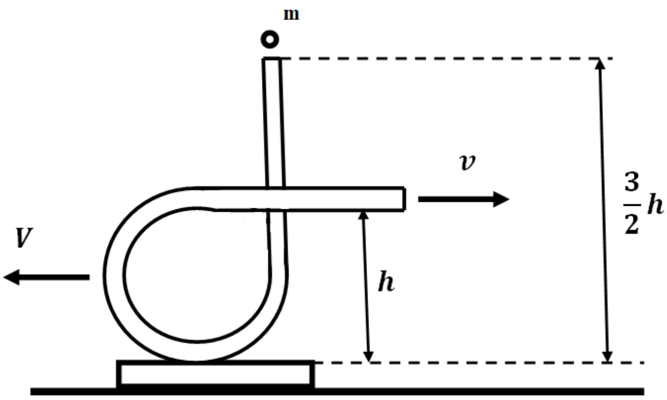


Рис. 8.7. К задаче 1

Решение. Запишем закон сохранения энергии и импульса для указанной задачи

$$\frac{3}{2}mgh = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2,$$

$$mv = MV. \tag{8.31}$$

Разделим первое и второе уравнение на m и введем параметр $x = M/m$.

$$v^2 + xV^2 = gh, \quad v = xV. \tag{8.32}$$

Исключим V

$$v^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) = gh \ \rightarrow v^2 = \frac{ghx}{1+x}.$$

Подставив выражение для параметра x, и извлекая корень, найдем скорость

$$v = \sqrt{\frac{gh}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)}}. \tag{8.33}$$

Вопросы к главе 8

1. Дайте определение работы.

2. Почему сила, перпендикулярная направлению движения тела, не совершает работы?

3. Сформулируйте «Золотое правило механики» для простых механизмов.

4. Дайте определение энергии. Какие два вида энергии существуют в природе?

5. Выведите формулу для потенциальной энергии сжатой пружины.

6. Выведите формулу для потенциальной энергии физического тела, поднятого над поверхностью Земли.

7. Получите формулу для кинетической энергии физического тела.

8. Сколько законов сохранения существует в природе для консервативной системы?

9. Получите закон сохранения импульса для замкнутой системы с парными взаимодействиями.

10. Получите закон сохранения энергии для частицы в потенциальном поле.

ГЛАВА 9. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Продолжим рассматривать вращательное движение твердого тела, закрепленного на оси. Выведем формулу для кинетической энергии вращающегося тела. Начнем с рассмотрения простой задачи. Пусть твердое тело представляет собой две точечные массы m_1 и m_2, скрепленные жесткими невесомыми стержнями, образующими треугольник. Один из концов треугольника размещен на оси вращения. Две массы находятся в других вершинах треугольника на удалении r_1 и r_2 от оси вращения. Плоскость треугольника находится в поперечной плоскости к оси вращения. Вращающийся треугольник показан на рис. 9.1. Будем считать, что треугольник вращается с постоянной угловой скоростью ω.

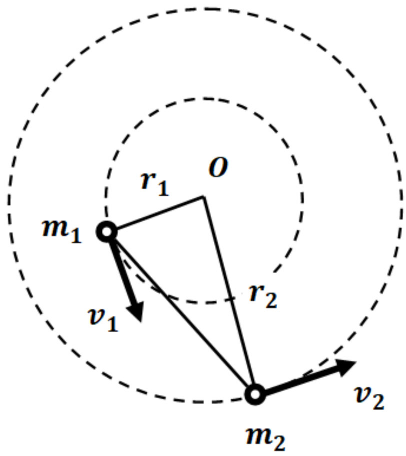


Рис. 9.1. К вычислению момента инерции для модели твердого тела в виде жесткого невесомого треугольника с двумя точечными массами в его вершинах

Кинетическая энергия вращающейся фигуры подсчитывается следующим образом

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 {r_1}^2 \omega^2,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2} m_2 {r_2}^2 \omega^2,$$

$$K_\Sigma = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}(m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2)\omega^2. \quad (9.1)$$

Линейные скорости масс (направленные по касательным к окружностям – траекториям их движения) составляют $v_1 = r_1\omega$, $v_2 = r_2\omega$. Величина в круглых скобках называется ***моментом инерции*** и обозначается

$$J = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2. \quad (9.2)$$

Приходим в результате к формуле для кинетической энергии вращающегося твердого тела в форме треугольника

$$K_\Sigma = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (9.3)$$

Момент инерции твердого тела. Обобщим выражение (9.2) для момента инерции на произвольное твердое тело. Покроем вращающееся тело трехмерной сеткой. Тогда для момента инерции можно записать сумму, которая при измельчении сетки превращается в интеграл

$$J = \Delta m_1 {r_1}^2 + \Delta m_2 {r_2}^2 + \cdots \Delta m_k {r_k}^2 \to \int\limits_M r^2 dm. \quad (9.4)$$

Делим и умножаем подынтегральное выражение в (9.4) на элемент объема dV. Производная $dm/dV = \rho$ переходит в плотность вещества твердого тела. В результате получим

$$J = \int\limits_V \rho(r)\, r^2 dV. \quad (9.5)$$

В (9.5) переменная r является расстоянием от элемента объема dV до оси вращения. С целью некоторого упрощения задачи, считаем, что плотность вещества зависит только от r.

Рассмотрим несколько задач на вычисление моментов инерции твердых тел при помощи интеграла (9.5).

Момент инерции длинного тонкого стержня

Рассмотрим тонкий стержень массой M и длиной L. Стержень вращается вокруг оси, которая проходит через его конец. Обозначим поперечное сечение стержня буквой S. Ось Or расположим вдоль стержня с точкой О на закрепленном конце. Элемент объема стержня равен $dV = Sdr$. Выпишем интеграл (9.5)

$$J = \int\limits_V \rho(r)\, r^2 dV = \int\limits_0^L \rho r^2 S dr = \rho S \int\limits_0^L r^2 dr = \frac{1}{3}\, \rho S L^3 = \frac{1}{3}\, M L^2. \quad (9.6)$$

Здесь мы выделили массу стержня, записав ее в виде М= ρSL.

Если ось вращения проходит через середину стержня, то момент инерции будет суммой моментов инерции для двух стержней с массой М/2 и длиной L/2. В этом случае

$$J = 2\frac{1}{3}\, \frac{M}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\, M L^2. \quad (9.7)$$

Момент инерции тонкого диска

Обозначим толщину диска буквой h. Элемент объема в данной задаче выглядит в виде узкого кольца $dV = 2\pi r dr h$. Диск имеет массу M и радиус R

$$J = \int\limits_V \rho\, r^2 dV = 2\pi h \rho \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi h \rho R^4 = \frac{1}{2} M R^2. \quad (9.8)$$

Выделяем массу диска $M = \pi R^2 h \rho$.

Вычисление большинства моментов инерции для твердых тел обеспечивает теорема Штейнера. Перейдем к ее рассмотрению.

Теорема Штейнера. *Момент инерции твердого тела равен моменту инерции относительно оси, проходящей через его центр масс, плюс масса тела, умноженная на квадрат параллельного смещения оси вращения.*

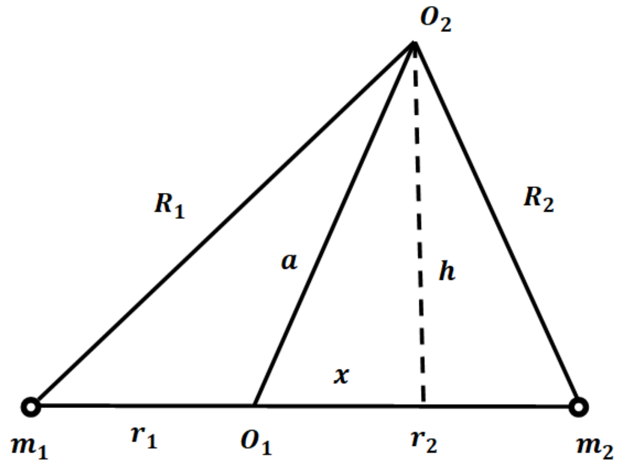


Рис. 9.2. К доказательству теоремы Штейнера

Доказательство теоремы проведем для твердого тела, представляющего собой две точечные массы, соединенные тонким невесомым стержнем, рис. 9.2. Массы m_1 и m_2 удалены на расстояния r_1 и r_2 от центра масс, точки O_1. Твердое тело вращается вокруг оси O_2, перпендикулярной плоскости рисунка. Расстояние между осями вращения обозначено буквой a. Из точки O_2 проведем перпендикуляр к линии, соединяющей массы. Его длину обозначим h. Выпишем момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс, т.е. точку O_1

$$J_{O_1} = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2. \tag{9.9}$$

Момент инерции относительно оси вращения, проходящей через точку O_2

$$J_{O_2} = m_1 {R_1}^2 + m_2 {R_2}^2. \tag{9.10}$$

Здесь R_1 и R_2 длины отрезков, соединяющих массы m_1 и m_2 с точкой O_2. Треугольник, образованный массами m_1 и m_2 и точкой O_2, разбивается высотой h на два прямоугольных треугольника, для которых справедлива теорема Пифагора

$$\begin{gathered} {R_1}^2 = h^2 + (r_1 + x)^2, \\ {R_2}^2 = h^2 + (r_2 - x)^2. \end{gathered} \tag{9.11}$$

Величина x описывает расстояние от центра масс, точки O_1, до основания высоты h. Треугольник, образованный массой m_2 и точками O_1 и O_2 также разбивается высотой h на два прямоугольных треугольника. Для того, который содержит точку O_1, справедлива теорема Пифагора

$$a^2 = h^2 + x^2. \tag{9.12}$$

Условием того, что точка O_1 является центром масс, является равенство моментов сил тяжести относительно этой точки, что дает

$$m_1 r_1 = m_2 r_2. \tag{9.13}$$

Твердое тело в рассматриваемом случае представляет собой сумму масс, поэтому полную массу обозначим

$$M = m_1 + m_2. \tag{9.14}$$

Подставим формулы (9.11) в выражение для момента инерции (9.10) и возведем в квадрат круглые скобки

$$J_{O_2} = m_1 h^2 + m_1(r_1 + x)^2 + m_2 h^2 + m_2(r_2 - x)^2 = J_{O_1} + M(h^2 + x^2)$$
$$+2x(m_1 r_1 - m_2 r_2).$$

В силу равенства моментов (9.13) последнее слагаемое обратится в ноль. В результате получим

$$J_{O_2} = J_{O_1} + Ma^2. \tag{9.15}$$

Таким образом, теорема Штейнера доказана. Не представляет труда обобщить доказательство на случай произвольного твердого тела. Чтобы не загромождать доказательство записью интегралов, ограничимся приведенным случаем.

Теорема Штейнера позволяет ограничить вычисление моментов инерции произвольных твердых тел только относительно оси, проходящей через их центр масс. Моменты инерции относительно других осей вращения находятся при помощи формулы Штейнера (9.15).

Работа, совершаемая внешней силой при вращении тела, закрепленного на оси.

Пусть внешняя сила $\boldsymbol{F}$ приложена к точке A твердого тела, рис. 9.3. За время dt она поворачивает твердое тело на угол $d\alpha$, при этом точка A перемещается на длину дуги dl. Для бесконечно малых величин дугу dl правомерно рассматривать как вектор перемещения $\boldsymbol{dl}$. В соответствии с формулой (8.5) элементарная работа, производимая силой $\boldsymbol{F}$ на перемещении $\boldsymbol{dl}$, составляет

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dl} = Fdl\cos\beta = Fr\sin\gamma d\alpha. \tag{9.16}$$

Мы подставили в (9.16) соотношение $dl = rd\alpha$ и $\beta = {}^{\pi}/_{2} - \gamma$. Учтем здесь, что

$$Fr\sin\gamma = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{M}|$$

есть модуль момента силы. Поэтому элементарная работа при вращении твердого тела составляет

$$dA = |\boldsymbol{M}|d\alpha. \tag{9.17}$$

Формулу (9.17) можно также переписать в виде

$$dA = |\boldsymbol{M}|\frac{d\alpha}{dt}dt = |\boldsymbol{M}|\omega dt. \tag{9.18}$$

Закон сохранения энергии *при вращении твердого тела, закрепленного на оси.* Выражение для кинетической энергии нам известно (9.3). Подсчитаем изменение кинетической энергии. Для этого возьмем дифференциал от (9.3)

$$dK = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = J\omega d\omega. \tag{9.19}$$

В соответствии с принципом сохранения энергии для замкнутых систем работа, совершаемая внешней силой (9.18) должна приводить к изменению кинетической энергии вращающегося тела. Поэтому

$$dA = dK. \tag{9.20}$$

Приравнивая выражения (9.18) и (9.19) приходим к уравнению динамики вращательного движения

$$J\frac{d\omega}{dt} = M. \tag{9.21}$$

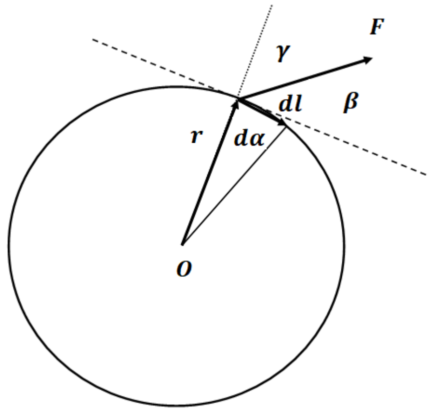


Рис. 9.3. К определению элементарной работы при вращении твердого тела, закрепленного на оси, внешней силой F

Мы вывели уравнение (9.21) в скалярном виде. Иногда удобно иметь векторный вид уравнения динамики вращательного движения

$$J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i}. \tag{9.22}$$

Вектор угловой скорости ω *по величине равен производной по времени от угла поворота, направлен перпендикулярно плоскости вращения так, чтобы с его конца вращение наблюдалось против часовой стрелки.*

Момент импульса системы материальных точек. В (9.22) момент инерции можно внести под знак производной по времени. Рассмотрим внимательнее выражение $J\boldsymbol{\omega}$. Введем для него обозначение $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{L} = (m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + \cdots)\boldsymbol{\omega} \to m_1 \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{v_1} + m_2 \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{v_2} + \cdots$$
$$= \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{p_2} + \cdots =$$
$$= \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p_i}. \tag{9.23}$$

Величина (9.23) носит название ***момент импульса*** механической системы. Следовательно, вместо (9.22) можно записать

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i}, \quad \boldsymbol{L} = \sum_k \boldsymbol{r_k} \times \boldsymbol{p_k}. \tag{9.24}$$

Рассмотрим аналогию между уравнениями динамики поступательного и вращательного движения.

Наименование	Вращение	Поступательное движение
Уравнение динамики	$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i},$ $\boldsymbol{L} = \sum_k \boldsymbol{r_k} \times \boldsymbol{p_k}$	$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p_i},$ $\boldsymbol{F} = \sum_k \boldsymbol{F_k}$
Закон сохранения	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0} \ \to \boldsymbol{L} = Const$ (закон сохранения момента импульса)	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \ \to \boldsymbol{P} = Const$ (закон сохранения импульса)

Задача 1. Доказать второй закон Кеплера для движения планеты по эллиптической орбите.

Решение. Рассмотрим сектор, который заметает радиус, проведенный из центра Солнца в центр планеты. Подсчитаем площадь сектора возникающего за время dt. Верхняя дуга сектора будет равна $drcos\alpha$, где $dr = vdt$, $v -$ орбитальная скорость планеты, а угол $\alpha -$ составляют между собой вектор орбитальной скорости и перпендикуляр к радиус-вектору в точке нахождения планеты в момент времени t. Поскольку $\alpha + \gamma = \pi/2$, где угол γ между радиус-вектором и вектором орбитальной скорости, то для длины элементарной дуги сектора

$$rd\varphi = vsin\gamma dt \ \rightarrow d\varphi = \frac{vsin\gamma dt}{r}.$$

Площадь сектора, заметаемого радиус-вектором за время dt, составляет

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi = \frac{1}{2}rvsin\gamma dt = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{L}|dt. \qquad (9.25)$$

где $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} -$ момент импульса планеты при ее орбитальном движении вокруг звезды.

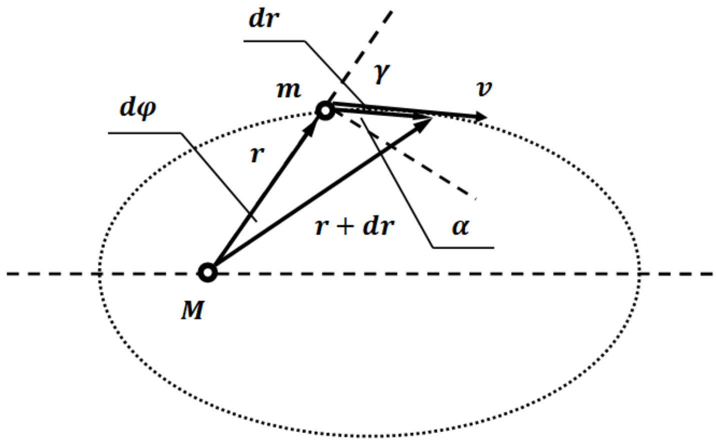


Рис. 9.4. К доказательству второго закона Кеплера

Момент импульса планеты подчиняется уравнению (9.24), где момент, создаваемый силой тяготения, оказывается равным нулю, так как сила тяготения параллельна радиус-вектору планеты, т.е. $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$. Поэтому момент орбитального импульса планеты сохраняется при ее движении по эллиптической орбите вокруг звезды. Это означает, что в (9.25) при dt стоит постоянная величина. Интегрируя (9.25) приходим ко второму закону Кеплера. За равные интервалы времени радиус-вектор планеты заметает одинаковую площадь. Как видим, второй закон Кеплера непосредственно связан с законом сохранения момента-импульса при орбитальном движении планеты.

Задача 2. Доказать третий закон Кеплера при движении планеты по эллиптической орбите.

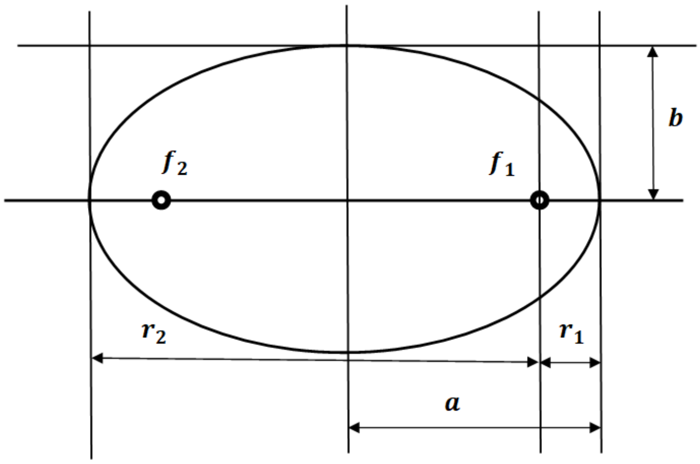


Рис. 9.5. К выводу третьего закона Кеплера.
Обозначения параметров эллипса

Решение. Для двух точек орбиты минимально и максимально удаленных от звезды запишем законы сохранения момента импульса и энергии

$$mr_1v_1 = mr_2v_2,$$
$$\frac{mv_1{}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r_1} = \frac{mv_2{}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r_2}. \qquad (9.26)$$

Решаем систему уравнений (9.26) относительно скорости v_1

$$v_1 = \sqrt{2\gamma M \frac{r_2/r_1}{(r_1 + r_2)}}. \qquad (9.27)$$

В соответствии с (9.25) выписываем выражение для скорости заметания секториальной площади

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}v_1r_1 = \sqrt{\gamma M \frac{r_1r_2}{2(r_1 + r_2)}}. \qquad (9.28)$$

Умножив (9.28) на период обращения планеты вокруг звезды получим площадь эллипса

$$T\sqrt{\gamma M \frac{r_1r_2}{2(r_1 + r_2)}} = \pi ab. \qquad (9.29)$$

Геометрические соотношения для эллипса дают

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad r_1r_2 = b^2.$$

Подставляем их в (9.29) и получаем связь между периодом обращения планеты и длиной главной полуоси эллипса

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}}a^{3/2}. \qquad (9.30)$$

Формула (9.30) представляет собой третий закон Кеплера. Ранее мы получили этот закон для круговых орбит, см. формулу (5.30).

Задача 3. Получить первый закон Кеплера (*материал повышенной сложности).

Решение. При движении точечной массы в поле гравитации звезды сохраняются ее полная энергия и вектор момента импульса

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r),$$
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$

Второе равенство означает, что вектора $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ лежат в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{L}$. Следовательно, точечная масса совершает движение в указанной плоскости, что упрощает рассмотрение. Решим задачу в полярных координатах. Скорость точки в полярных координатах имеет вид

$$v = (v_r, v_\varphi) = (\dot{r}, r\dot{\varphi}).$$

Компонента $v_r = \dot{r}$ направлена вдоль радиус вектора материальной точки в плоскости орбиты. Компонета $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ перпендикулярно радиус-вектору. Потенциал в поле тяготения получен нами в главе 8, формула (8.16). Потенциальная энергия точечной массы получается умножением потенциала на величину этой массы

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \;\; \alpha = \gamma m M.$$

Выпишем законы сохранения в полярных координатах

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \frac{\alpha}{r},$$
$$L = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

Исключим $\dot{\varphi}$ из закона сохранения энергии

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \;\rightarrow\; E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Разрешим закон сохранения энергии относительно $\dot{r}$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{L^2}{m^2r^2}}.$$

Для $\dot{\varphi}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Поделим последнее уравнение на предпоследнее и умножим на dr

$$d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

Обозначим

$$A = 2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}, \quad B = \frac{m\alpha}{L}.$$

Получим как результат элементарных преобразований

$$d\varphi = \frac{d\left(B - \frac{L}{r}\right)}{\sqrt{A - \left(B - \frac{L}{r}\right)^2}}.$$

Делая замену

$$x = B - \frac{L}{r},$$

Приходим к стандартному интегралу

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{A - x^2}}.$$

Результат интегрирования

$$\varphi = arccos\frac{\frac{L}{r} - B}{\sqrt{A}} + const.$$

Выбором начальной точки решения константу интегрирования всегда можно обратить в ноль. Поэтому

$$\frac{L}{r} = B + \sqrt{A}cos\varphi.$$

Решению можно придать вид конического сечения, известного в математике

$$p = r(1 + ecos\varphi), \tag{9.31}$$

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \;\; e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}},$$

здесь p и e – «параметр и эксцентриситет» эллипса.

При $E < 0 \;\rightarrow\; e < 1$ движение ограничено в пространстве (финитно), т.е. точечная масса движется по эллиптической орбите. При $e = 0$ эллипс превращается в окружность. При $E > 0$ движение не ограничено в пространстве (инфинитно), точечная масса движется по гиперболической орбите.

Дальнейшие подробности можно посмотреть в «Механике» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица.

Вопросы к главе 9

1. Приведите выражение для кинетической энергии вращающегося тела.
2. Выпишите интеграл, при помощи которого вычисляется момент инерции физического тела.
3. Вычислите момент инерции тонкого диска.
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Получите выражение для элементарной работы, совершаемой силой, вращающей физическое тело вокруг оси.
6. Выпишите уравнение динамики для физического тела, вращающегося вокруг оси.
7. Получите закон сохранения момента импульса для тела, равномерно вращающегося вокруг оси.
8. Докажите второй закон Кеплера.
9. Докажите третий закон Кеплера.

ГЛАВА 10. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

В космосе летает множество разнообразных объектов – звезды, планеты, астероиды, кометы, метеориты. С каждым из этих объектов можно связать систему отсчета. Для наблюдателя, который расположился в одной из этих систем отсчета, все другие под воздействием сил тяготения будут совершать поступательное движение по криволинейным траекториям и вращаться. Ньютон предложил разделить все системы отсчета на те, в которых выполняется второй закон Ньютона и на те, в которых этот закон не выполняется. Такое разделение позволяет навести хоть какой-то порядок в хаосе разнообразных систем отсчета. Об инерциальных системах отсчета шел разговор в главе 2. Все такие системы отсчета могут быть сдвинуты относительно друг друга, повернуты на постоянный угол и могут двигаться прямолинейно и равномерно. В данной главе подробнее обсудим неинерциальные системы отсчета, а также форму уравнений динамики в неинерциальных системах отсчета.

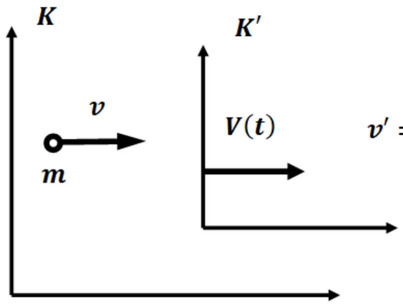


Рис. 10.1. Поступательное движение неинерциальной системы отсчета

Сила инерции

Рассмотрим инерциальную систему отсчета K. Пусть в этой системе под воздействием силы $\boldsymbol{F}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$ движется частица. Допустим, что относительно системы K с переменной скоростью $\boldsymbol{V}(t)$ движется неинерциальная система отсчета K'. Зависимость скорости системы K' от времени, означает, что K' движется с ускорением $\boldsymbol{w} = d\boldsymbol{V}(t)/dt$. Для наблюдателя в системе K' скорость частицы в соответствии с принципом сложения (вычитания) скоростей Галилея будет равна

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} \ \rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}. \qquad (10.1)$$

Скорость частицы v удовлетворяет в инерциальной системе K *второму закону Ньютона*

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}. \qquad (10.2)$$

Подставим в (10.2) скорость $\boldsymbol{v}$ из (10.1)

$$m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{F}.$$

Получим в результате уравнение движения частицы в неинерциальной системе отсчета K'

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{F} - m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}.$$

Или в более краткой записи

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{w}. \quad (10.3)$$

Время при переходе между системами отсчета в классической механике не меняется $t = t'$. Сила, которая появилась в правой части уравнения (10.3) носит название ***силы инерции***

$$\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{w} = -m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}. \quad (10.4)$$

Все мы хорошо знакомы с этой силой. Она появляется в транспорте или в лифте, который движется с ускорением. При ускорении автобуса пассажиры, чтобы не упасть назад, хватаются за поручни. При торможении автобуса пассажиры могут упасть вперед и тоже хватаются за поручни. То же самое происходит в лифте. При подъеме лифта с ускорением вес пассажира увеличивается, так как к ускорению свободного падения прибавляется ускорение лифта. При торможении лифта вес пассажира уменьшается, так как ускорение свободного падения и ускорение лифта вычитаются.

Усложним задачу. Допустим, что система K' движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{V}(t)$ и одновременно вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$**.** Выражение для силы при переходе в такую неинерциальную систему отсчета получено Ландау и Лифшицем в их курсе механики. Приведем это выражение

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{w} + m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (10.5)$$

В (10.5) первые два слагаемых в правой части нам уже известны. Третье слагаемое носит название ***силы Ландау***. Это слагаемое отлично от нуля, если неинерциальная система обладает угловым ускорением (раскручивается или тормозится). В большинстве случаев неинерциальные системы вращаются с постоянными угловыми скоростями. Для них сила Ландау отсутствует.

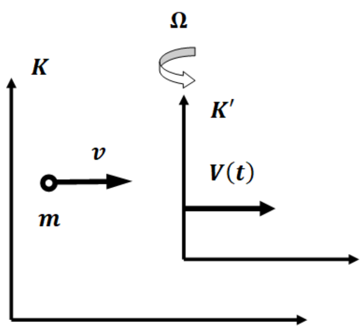


Рис. 10.2. Поступательное и вращательное движение неинерциальной системы отсчета

Сила Кариолиса

Четвертое слагаемое в (10.5) носит название ***силы Кариолиса***. Эта сила возникает, если масса движется со скоростью отличной от нуля в неинерциальной системе отсчета. Например, наша Земля вращается с частотой

$$\Omega = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}\,\text{гц} = 1{,}16 \cdot 10^{-5}\,\text{гц}.$$

Сила Кариолиса подмывает берега рек. Реки текут со скоростью $v' = 1-3$ м/с. Масса воды в 1 тонну вызывает появление силы

$$F_{\text{к}} \cong 1{,}16 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{3} = 3{,}48 \cdot 10^{-2}\ \text{Н}.$$

Эти небольшие силы на протяжении столетий и тысячелетий и подтачивают берега рек. Направление действия силы Кариолиса определяется векторным произведением $\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\Omega}$. Если река течет с юга на север, то вода подтачивает восточный берег. Если же река течет с севера на юг, то подтачивается западный берег.

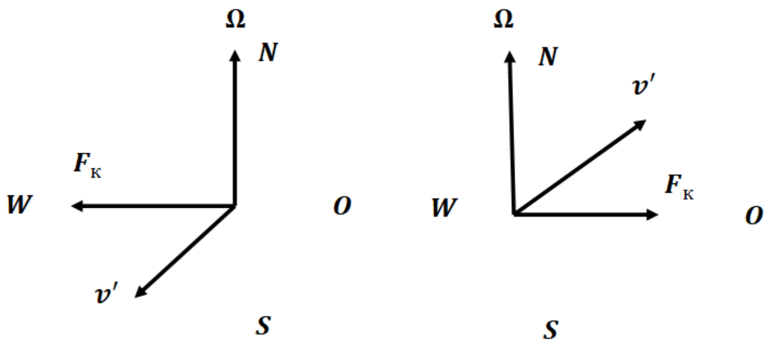


Рис. 10.3. Направление силы Кариолиса на поверхности Земли

Центробежная сила

Пятое слагаемое в формуле (10.5) носит название ***центробежной силы***. Для плоского вращения точечной массы по кругу величина центробежной силы составляет

$$F_{\text{ц}} = mr\Omega^2. \tag{10.6}$$

Центробежная сила действует только в неинерциальной системе отсчета. Направлена она в сторону от центра или от оси вращения. Например, если спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите, то в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, на него действует сила тяготения Земли, она же центростремительная сила. Если перейти во вращающуюся систему отсчета вместе со спутником, то в ней спутник будет покоиться. На него будут действовать две силы – сила тяготения со стороны Земли и центробежная сила, которая уравновесит силу тяготения. Суммарная сила, действующая на спутник, в неинерциальной системе отсчета будет равна нулю. Именно поэтому спутник будет покоиться в такой системе отсчета.

Широтное горообразование

На нашей планете Земля центробежная сила, действующая на земную кору, приводит к широтному горообразованию в районе 30–50 градусов широты. На полюсах центробежная сила равна нулю, так как радиус-вектор параллелен вектору угловой скорости планеты. На экваторе центробежная сила максимальна, однако, она действует перпендикулярно к поверхности Земли. В промежуточных широтах центробежная сила действует перпендикулярно оси вращения Земли, и поэтому обладает компонентой, направленной вдоль поверхности Земли в сторону экватора. Величина тангенциальной компоненты центробежной силы максимальна на 45 градусе широты. Если посмотреть на глобус, то мы видим цепочку гор, протянувшихся с запада на восток – Альпы, Балканы, Кавказ, Алтай, Памир, Тянь-Шань, Саяны, Сихотэ-Алинь, Гималаи. Это и есть широтное горообразование. Меридиональное горообразование, по-видимому, имеет другую причину, а именно – приливные силы, действующие со стороны Солнца и Луны. По меридиану расположены Урал, Кордильеры в Америке, горы вдоль побережья Тихого Океана.

Как видим, сила Кариолиса и центробежная сила имеют планетарный характер на нашей планете!

Вопросы к главе 10

1. Чем неинерциальные системы отсчета отличаются от инерциальных?
2. Что такое сила инерции?
3. Когда возникает сила Кариолиса? Приведите формулу. К какому эффекту приводит сила Кариолиса на поверхности Земли?
4. Что такое центробежная сила? Когда возникает? Приведите формулу. К каким эффектам приводит эта сила на поверхности Земли?

ГЛАВА 11. РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Реактивное движение используют некоторые представители животного мира, такие как кальмар, осьминог. Этот вид движения на протяжении столетий использовали военные, которые изобрели пороховые ракеты. Современная армия оснащена реактивной артиллерией. Русский ученый Циолковский во второй половине XIX в. предложил использовать принцип реактивного движения для полетов в космическом пространстве.

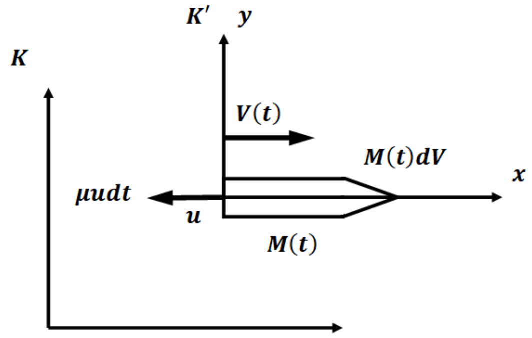


Рис. 11.1. К выводу уравнения Мещерского

Уравнение реактивного движения

Принцип реактивного движения основан на применении закона сохранения импульса. Рассмотрим систему отсчета K, связанную с Землей. Такую систему отсчета можно считать достаточно близкой к инерциальной. Пусть в системе K движется ракета со скоростью $V(t)$. Свяжем с ракетой неинерциальную систему отсчета K'. Считаем, что у ракеты включен реактивный двигатель. За одну секунду он выбрасывает в окружающее пространство импульс, равный μu, где μ скорость истечения массы (количество килограммов массы, истекающее за 1 секунду), а u скорость истечения газов из сопла реактивного двигателя относительно среза сопла. Сила, с которой реактивная струя газов, выбрасываемая из сопла ракеты, давит на ракету, равна скорости истечения импульса

$$F = \frac{dp}{dt} = \mu u. \tag{11.1}$$

В соответствии с уравнением (10.3) динамики поступательного движения в неинерциальной системе отсчета мы должны записать

$$\boldsymbol{F} - M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = 0. \tag{11.2}$$

Скорость ракеты v' относительно системы отсчета K', связанной с самой ракетой равна нулю. Поэтому слагаемое

$$M\frac{dv'}{dt}$$

выпадает. Слагаемое

$$-M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$

представляет собой силу инерции в неинерциальной системе отсчета. Записав (11.2) в виде

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \mu u, \qquad (11.3)$$

приходим к уравнению реактивного движения Мещерского. В записи

$$Md\boldsymbol{V} = \mu u dt \qquad (11.4)$$

оно представляет собой закон сохранения импульса. Импульс $\mu u dt$, теряемый ракетой за время dt, равен импульсу, приобретаемому ракетой $Md\boldsymbol{V}$ за это же время.

Формула Мещерского

Дифференциальное уравнение (11.3) можно проинтегрировать для случая, когда двигатель ракеты работает стационарно. При этом скорость потери массы и скорость истечения газов являются постоянными величинами. Для массы ракеты в случае стационарной работы двигателя можно записать

$$M(t) = M_0 - \mu t. \qquad (11.5)$$

Перепишем уравнение (11.3) в стартовом виде для интегрирования

$$dV = \frac{\mu u}{M(t)} dt. \qquad (11.6)$$

Введем параметр

$$\alpha = \frac{\mu}{M_0},$$

и запишем (11.6) в форме

$$dV = \alpha u \frac{dt}{1 - \alpha t}. \qquad (11.7)$$

Интегрируем (11.7) по времени от нуля до t

$$V(t) - V_0 = u\int_0^t \frac{d\alpha t}{1 - \alpha t} = u\int_0^t d[-ln(1 - \alpha t)]$$
$$= u[-ln(1 - \alpha t)]|_0^t = -uln(1 - \alpha t). \qquad (11.8)$$

Получим в размерных единицах для приращения скорости ракеты

$$\Delta V(t) = -uln\left(1 - \frac{\mu t}{M_0}\right). \qquad (11.9)$$

Как видим, приращение скорости при реактивном движении линейно зависит от скорости истечения газов и логарифмически от доли потерянной массы в стартовом весе ракеты. Например, если $u = 10$ км/с и

$$1 - \frac{\mu t}{M_0} = e^{-1},$$

то $\Delta V(t) = u = 10$ км/с.

Ракетный двигатель – реактивный двигатель, источник энергии и рабочее тело которого находятся в самом средстве передвижения. Ракетный двигатель – единственный практически освоенный способ вывода полезной нагрузки в космическое пространство.

Сила тяги в ракетном двигателе возникает в результате преобразования исходной энергии в кинетическую энергию реактивной струи рабочего тела. В зависимости от вида энергии, преобразующейся в кинетическую энергию реактивной струи, различают ***химические, ядерные, электрические ракетные двигатели***. Высказана также идея ***фотонного ракетного двигателя***.

Характеристикой эффективности ракетного двигателя является ***удельный импульс*** – отношение количества движения, получаемого ракетным двигателем, к массе израсходованного рабочего тела. Удельный импульс имеет размерность скорости. Для ракетного двигателя, работающего на расчетном режиме, удельный импульс численно равен скорости истечения рабочего тела из сопла.

В среде конструкторов ракетных двигателей идет погоня за величиной удельного импульса (скорости истечения рабочего тела). Химические двигатели позволяют достичь удельного импульса 2–3 км/с. Ядерные двигателя 10–50 км/с, электрические двигатели 100–200 км/с, фотонные двигатели, представляющие собой лазерные установки, могут развивать теоретический предел скоростей истечения, равный скорости света $c = 300\ 000\ \text{км/с}$.

Подробности работы различных видов ракетных двигателей можно посмотреть по ссылке (https://ru.wikipedia.org/wiki/Ракетный_двигатель).

Вопросы к главе 11

1. Какой закон физики лежит в основе реактивного движения?
2. Приведите уравнение реактивного движения. Как фамилия ученого, который его открыл?
3. Выведите формулу Мещерского. От чего зависит приращение скорости при реактивном движении?
4. Какие виды ракетных двигателей вы знаете? Каковы скорости истечения рабочих тел для этих двигателей?

ГЛАВА 12. МАЯТНИКИ

Колебательное движение часто встречается в природе и технике. Колеблются листья на деревьях, качаются из стороны в сторону сами деревья на ветру. Бегут волны по воде, при этом частицы воды совершают движение вверх-вниз, т.е. колеблются. В технике распространено явление вибрации. Это мелкие колебания металлических конструкций. В авиации вибрация крыльев самолета имеет специальное название – флаттер. Это явление может разрушить крыло и привести к авиакатастрофе. В энергетике ведут борьбу с вибрацией ротора турбины. Устанавливают специальные системы вибромониторинга турбин. Сильная вибрация гидротурбины на Саяно-Шушенской ГЭС привела к ее разрушению и колоссальной катастрофе, которую потом устраняли много лет.

Характерным примером колебательных процессов является математический маятник. Это небольшой шарик массы m на подвесе, длиной l. Если отвести шарик в сторону от вертикального положения равновесия и отпустить, то шарик начнет совершать колебательное движение вокруг вертикального положения равновесия.

Математический маятник *– это материальная точка на жестком невесомом подвесе.* Рассмотрим рис. 12.1. На нем показан математический маятник.

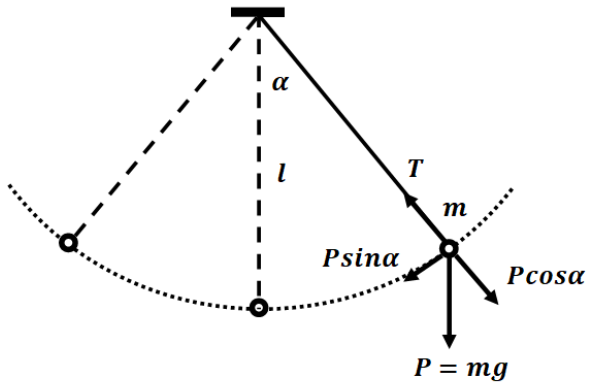


Рис. 12.1. Математический маятник

На маятник действует сила тяжести $\mathbf{P} = m\boldsymbol{g}$, которую разложим на две компоненты – нормальную к траектории движения $P_{\perp} = Pcos$ и тангенциальную к траектории $P_{\parallel} = Psin\alpha$. Траекторией движения является дуга окружности радиусом l, с центром в точке подвеса маятника. Колебания маятника будут происходить внутри сектора круга, ограниченного двумя граничными углами $-\alpha_{\text{г}} < \alpha < \alpha_{\text{г}}$. Нормальная компонента силы тяжести уравновешивается силой натяжения нити $T = P_{\perp} = Pcos\alpha$. Тангенциальная компонента силы тяжести приводит к следующему уравнению движения шарика в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = -mgsin\alpha. \qquad (12.1)$$

Масса шарика из уравнения выпадает. Знак минус в (12.1) обусловлен отрицательным направлением «скатывающей» силы. Скорость v в (12.1) это линейная скорость шарика, движущегося по дуге окружности радиуса l ,

$$v = l\omega. \tag{12.2}$$

Подставив (12.2) в (12.1), получим

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{g}{l} sin\alpha = 0. \tag{12.3}$$

В соответствии с формулами (5.20)–(5.21), связывающими угловую скорость и ее производные с плоским углом, уравнение движения (12.3) принимает следующий вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) + \frac{g}{l} sin\alpha(t) = 0. \tag{12.4}$$

Зависимость от времени далее будем подразумевать, но в явном виде выписывать не будем. Введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \tag{12.5}$$

смысл которого прояснится несколько позже. В физике производные по времени принято обозначать точками над буквами

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) \equiv \ddot{\alpha}.$$

Это делается для краткости записи. С учетом сказанного уравнение (12.4) перепишем в виде

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 sin\alpha = 0. \tag{12.6}$$

Полученное нами уравнение (12.6) называется ***уравнением колебаний математического маятника.***

Малые колебания

В том случае, если углы отклонения подвеса маятника от положения равновесия малы

$$|\alpha| \ll 1, \tag{12.7}$$

синус можно заменить на сам угол. Приходим в этом приближении к уравнению малых колебаний маятника

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0. \tag{12.8}$$

Уравнение (12.8) имеет два частных решения

$$\alpha_1 = \sin(\omega t) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \cos(\omega t). \tag{12.9}$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой решений (12.9) в уравнение (12.8). Общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (12.8) записывается в виде линейной комбинации двух частных решений

$$\alpha = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t). \tag{12.10}$$

Преобразуем (12.10) к другому общепринятому виду. Для этого разделим и умножим правую часть равенства на $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\omega t)\right).$$

Введем обозначения

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \ cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Переписываем решение в новых обозначениях

$$\alpha = A(cos\varphi \sin(\omega t) + sin\varphi \cos(\omega t)) = A \sin(\omega t + \varphi). \qquad (12.11)$$

Константы a, b или A, φ должны находиться из начальных условий. Допустим, что в момент времени $t = 0$ подвес с шариком находятся в вертикальном положении. Тогда $0 = Asin\varphi.$ Так как константа A не может равняться нулю, следовательно, $\varphi = 0$. Так как синус удовлетворяет неравенству $|\sin(\omega t)| \leq 1,$ то константа A будет равна углу максимального отклонения маятника $A = \alpha_г$. Поэтому решение уравнения малых колебаний математического маятника будет

$$\alpha(t) = \alpha_г \sin(\omega t). \qquad (12.12)$$

Полученное решение является периодическим с периодом T, который находится из соотношения

$$\omega T = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (12.13)$$

Решение разбивается на 4 четверти. Первая четверть – подъем маятника в правое крайнее положение, где шарик останавливается. Вторая четверть – обратный ход к положению равновесия. В точке равновесия шарик имеет максимальную кинетическую энергию и максимальную скорость. Третья четверть – подъем маятника в крайнее левое положение, в котором шарик также останавливается. Четвертая четверть – обратный ход к положению равновесия. На этом период колебаний заканчивается.

Для маятника выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{m{v_0}^2}{2} \equiv E, \qquad (12.14)$$

здесь $h -$ высота подъема шарика, $v_0 -$ его скорость в точке равновесия, $E -$ полная энергия, равная максимальной кинетической энергии, которая достигается в положении равновесия. Выражение для высоты подъема $h = l(1 - cos\alpha)$.

Закон сохранения энергии для уравнения малых колебаний (12.8*)

Умножим уравнение малых колебаний на $\dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \omega^2 \dot{\alpha}\alpha = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{d}{dt}\dot{\alpha}^2 + \omega^2 \frac{d}{dt}\alpha^2 = 0.$$

Интегрируем по четверти периода

$$\int_0^{T/4} d\dot{\alpha}^2 + \omega^2 \int_0^{T/4} d\alpha^2 = 0 \ \rightarrow \ -\dot{\alpha}(0)^2 + \omega^2 {\alpha_г}^2 = 0.$$

Умножим полученное равенство на $\frac{m}{2} l^2$

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = mg\left(l\frac{{\alpha_г}^2}{2}\right). \qquad (12.15)$$

Выражение в круглых скобках есть разложение косинуса для высоты подъема

$$h = l(1 - cos\alpha_г) \cong l\left(1 - \left(1 - \frac{{\alpha_г}^2}{2}\right)\right) = l\frac{{\alpha_г}^2}{2}.$$

При интегрировании от нуля до произвольного времени получим закон сохранения в виде

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\left(l\frac{\alpha^2}{2}\right). \qquad (12.16)$$

Таким образом, переход от нелинейного уравнения (12.6) к уравнению малых колебаний (12.8) приводит к приближенному выражению для высоты подъема шарика в законе сохранения энергии.

Нелинейный математический маятник$(*)$

Решение нелинейного уравнения (12.6) получено блестящим немецким математиком Якоби в середине XIX в. Оно имеет вид

$$\alpha = 2arcsin[\xi sn(\omega t, \xi)], \qquad (12.17)$$

$$\xi = \frac{\varepsilon + \omega^2}{2\omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{E}{ml^2},$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \qquad \Omega = \frac{\pi}{2}\frac{\omega}{K(\xi)}.$$

Здесь $sn(\omega t, \xi)$ – так называемый эллиптический интеграл Якоби, $K(\xi)$ – эллиптический интеграл 1-го рода. Указанные интегралы можно найти в справочниках по математике или посмотреть в интернет источниках. С точностью до 1 % период нелинейных колебаний описывается формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]. \qquad (12.18)$$

Нелинейный маятник также совершает периодические колебания. Форма и период колебаний несколько отличаются от синусоидальных. Форма колебаний для нелинейного маятника ближе к ступеньке, чем половинка синусоиды.

Читатель, интересующийся математикой, может посмотреть ссылки: (Adlaj S. An Eloquent Formula for the Perimeter of an Ellipse (англ.) // Notices of the AMS. 2012. Vol. 59, № 8. P. 1096–1097. Эллиптические функции Якоби www.dsplib.ru/content/ellipfunc/ ellipfunc.html).

Пружинный маятник.

Прикрепим к пружине, подвешенной к потолку, груз массой m. Пружина растянется и ее нижний конец примет положение x_0. Надавим на груз пальцем. Нижний конец пружины примет максимальное нижнее положение $x_н$. Отпустим палец. Груз начнет колебаться вверх-вниз. Верхнее максимальное положение пружины отметим как $x_в$. Диапазон колебаний составит $x_н < x < x_в$. Все координаты нижнего конца пружины попадают в область отрицательных чисел, смотри рисунок.

Запишем второй закон Ньютона для случая, когда груз колеблется и первый закон статики для случая равновесия нагруженной пружины. На груз действуют две силы – сила тяжести и сила упругости пружины (сила Гука). Эти силы показаны на рис. 12.2.

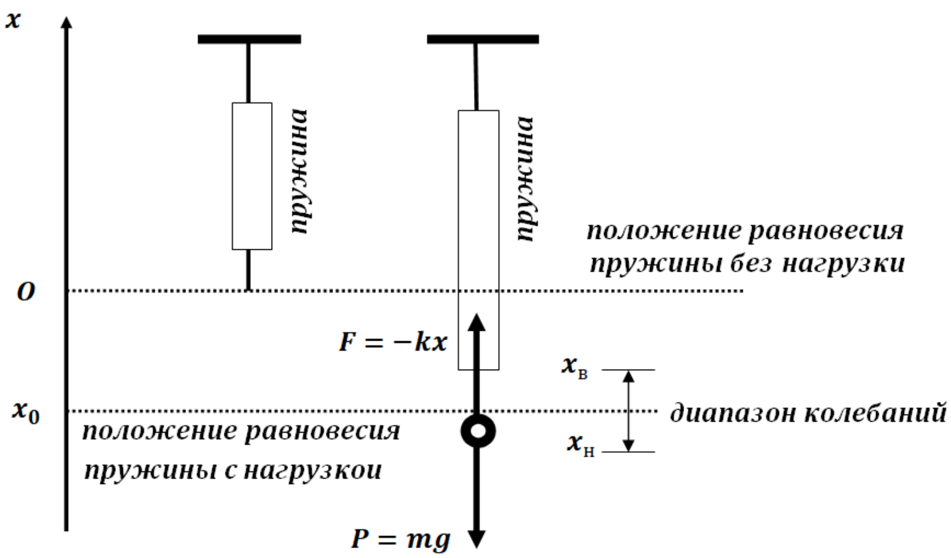


Рис. 12.2. Пружинный маятник

$$ma = -mg - kx,$$
$$0 = -mg - kx_0. \quad (12.19)$$

Сила тяжести действует в отрицательном направлении оси Ох, поэтому перед ней стоит знак минус. Для ускорения груза введем обозначение с двумя точками

$$a = \ddot{x}.$$

Вычтем из первого уравнения (12.19) второе и все слагаемые сосредоточим в левой части уравнения

$$m\ddot{x} + k(x - x_0) = 0.$$

После переобозначений

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \ddot{\Delta x} = \ddot{x}$$

приходим к уравнению малых колебаний

$$\ddot{\Delta x} + \omega^2 \Delta x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (12.20)$$

Уравнение (12.20) по своему математическому виду полностью совпадает с уравнением малых колебаний математического маятника (12.8), поэтому оно имеет аналогичные решения

$$\Delta x(t) = \Delta x_г \sin(\omega t). \quad (12.21)$$

Для координаты нижнего конца пружины следует записать

$$x(t) = x_0 + \Delta x_г \sin(\omega t), \quad (12.22)$$

где

$$\Delta x_г = \frac{x_в - x_н}{2}. \quad (12.23)$$

В верхней и нижней точках диапазона колебаний скорость груза равна нулю, поэтому равна нулю кинетическая энергия груза. Закон сохранения энергии для указанных точек должен выглядеть следующим образом

$$\frac{k{x_{\text{н}}}^2}{2} = \frac{k{x_{\text{в}}}^2}{2} + mg(x_{\text{в}} - x_{\text{н}}).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{k}{2}(x_{\text{в}} - x_{\text{н}})(x_{\text{в}} + x_{\text{н}}) = -mg(x_{\text{в}} - x_{\text{н}}).$$

Сократив скобку $(x_{\text{в}} - x_{\text{н}})$ получим второе уравнение (12.19). Т.е. и в задаче о пружинном маятнике закон сохранения энергии является следствием уравнений движения. В промежуточном положении маятника закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{k{x_{\text{н}}}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mg(x - x_{\text{н}}). \tag{12.24}$$

Период колебаний пружинного маятника зависит от его массы и жесткости пружины

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{12.25}$$

Вопросы к главе 12

1. Выпишите уравнение малых колебаний математического маятника.
2. Выпишите частные решения уравнения малых колебаний.
3. Каковы частота и период колебаний математического маятника?
4. Выпишите закон сохранения энергии для математического маятника.
5. Выпишите уравнение малых колебаний пружинного маятника.
6. Какова частота и период колебаний пружинного маятника?
7. Относительно какого положения колеблется пружинный маятник?
8. Запишите закон сохранения энергии для пружинного маятника.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособие для вузов / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1973. – 464 с.

Грибов Л.А. Основы физики / Л.А. Грибов, Н.И. Прокофьева. – М. : Гардарика, 1998. – 560 с.

Детлаф А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 608 с.

Дмитриева В.Ф. Физика : учеб. для студентов образоват. учреждений сред. проф. образования / В.Ф. Дмитриева. – М. : Изд. центр «Академия», 2003. – 464 с.

Енохович А.С. Справочник по физике и технике : учеб. пособие для учащихся / А.С. Енохович. – М. : Просвещение, 1989. – 224 с.

Курс физики : учеб. для вузов : в 2 т. / под ред. В.Н. Лозовского. – Т. 1. – СПб. : Лань, 2001. – 576 с.

Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – 208 с.

Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики / Г.С. Ландсберг. – М. : Наука, 1995.

Ремизов А.Н. Курс физики : учеб. для вузов / А.Н. Ремизов, А.Я. Потапенко. – М. : Дрофа, 2002.

Савельев И.В. Курс общей физики : в 3 т. / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989.

Трофимова Т.И. Краткий курс физики : учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2004. – 352 с.

Трофимова Т.И. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1990. – 478 с.

Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями : учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М. : Высш. шк., 1999. – 591 с.

Физический энциклопедический словарь / под ред. А.М. Прохорова. – М. : Сов. энцикл., 1984. – 944 с.

Чертов А.Г. Задачник по физике : учеб. пособие / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981. – 496 с.

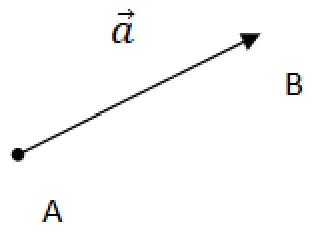
Яворский Б.М. Основы физики / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М. : Наука, 1969.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Вектор

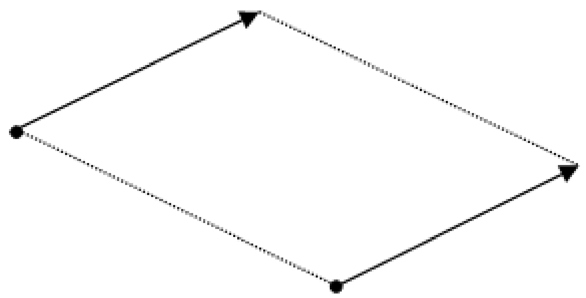
1. Вектор – *это направленный отрезок в пространстве.*

Вектор имеет начало, конец и обладает длиной. Начало вектора обозначают точкой, конец вектора обозначают стрелкой. Вектор обозначают стрелкой над буквой, например так $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{R}$. В физической литературе часто вектора обозначают просто жирными буквами, а стрелку над буквами не пишут, например так **a**, **b**, **R**.

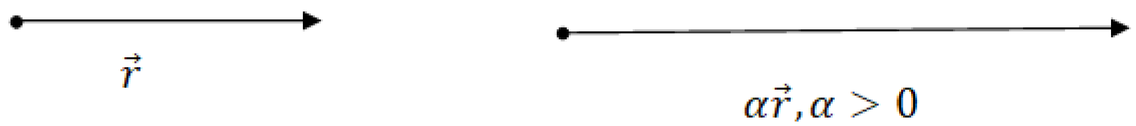


Длина вектора – называется его модулем и обозначается $|\vec{a}|$. Модуль вектора нельзя путать с понятием модуля числа в алгебре. Модуль числа равен положительному значению этого числа. А модуль вектора – это длина направленного отрезка, который собственно и называется вектором.

Вектор не привязан к конкретной точке пространства и его можно переносить из точки в точку параллельно самому себе. При этом используется правило параллелограмма.



2. Вектор можно умножать на число. При этом на это число умножается длина вектора.



Таким образом, если задан вектор $\vec{r}$ и положительное число $\alpha > 0$, то запись $\alpha\vec{r}$ означает, что

$$|\alpha\vec{r}| = \alpha \cdot |\vec{r}|.$$

Вектор можно умножить не только на положительное, но и на отрицательное число. В этом случае направление результирующего вектора меняется на обратное. Таким образом, если $\alpha < 0$, то

$$|\alpha\vec{r}| = |\alpha| \cdot |\vec{r}|.$$

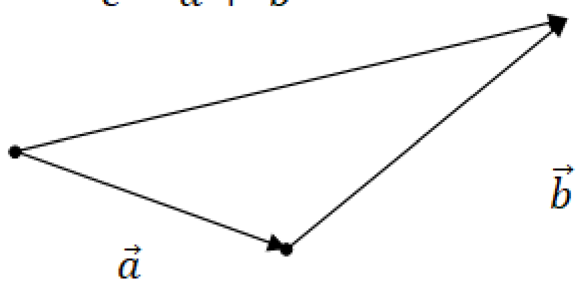
В этой формуле $|\alpha|$- модуль числа, а $|\vec{r}|$- модуль вектора.

Вектор можно умножать на ноль. При этом результирующий вектор уничтожается, исчезает. Пишут так

$$|\vec{r}| \cdot 0 = \vec{0}.$$

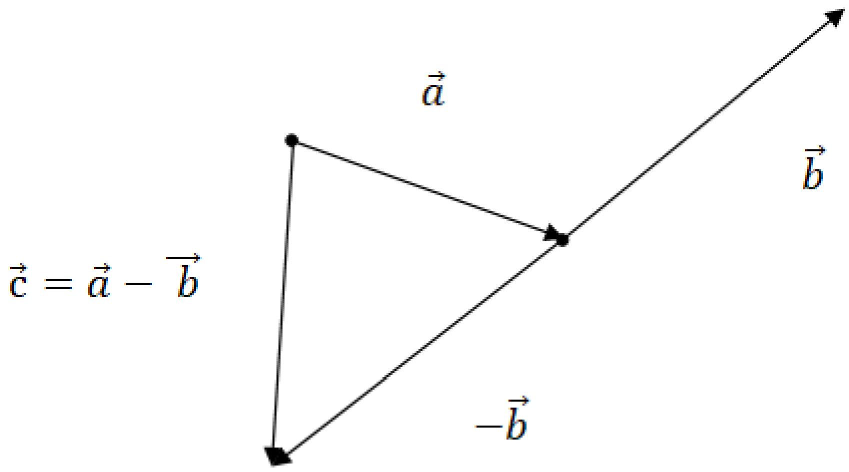
3. Вектора можно складывать и вычитать. Сложение векторов осуществляется по правилу треугольника. Пусть заданы два вектора $\vec{a}, \ \vec{b}$. Для нахождения суммы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ нужно осуществить параллельный перенос вектора $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Вектора $\vec{a}, \ \vec{b}$ образуют две стороны треугольника. Тогда третья сторона треугольника будет равна вектору $\vec{c}$. Причем начало вектора $\vec{c}$ будет расположено в начале вектора $\vec{a}$, а конец вектора $\vec{c}$ будет находиться в конце вектора $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Операция вычитания векторов сводится к операции сложения. Предварительно следует изменить направление вычитаемого вектора. На рисунке это выглядит следующим образом

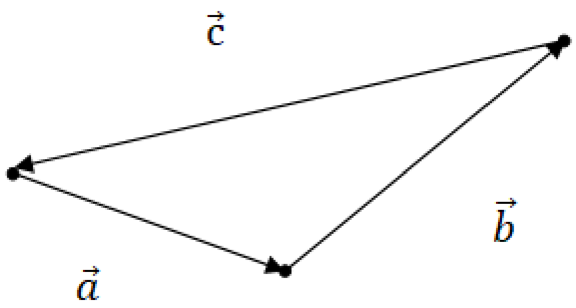
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



4. Сумму или разность векторов можно умножать на число по следующему правилу

$$\alpha \cdot \left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} \pm \alpha \cdot \vec{b}.$$

5. Если три вектора образуют сумму равную нулю, то они образуют замкнутый треугольник.

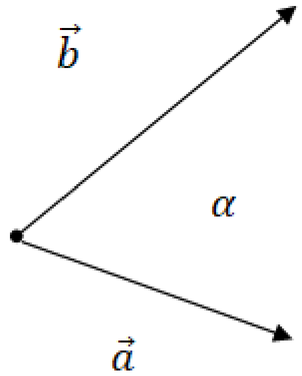


$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

6. Скалярное произведение двух векторов. В алгебре векторов вводится две операции умножения. Первая называется скалярным произведением двух векторов

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\alpha.$$

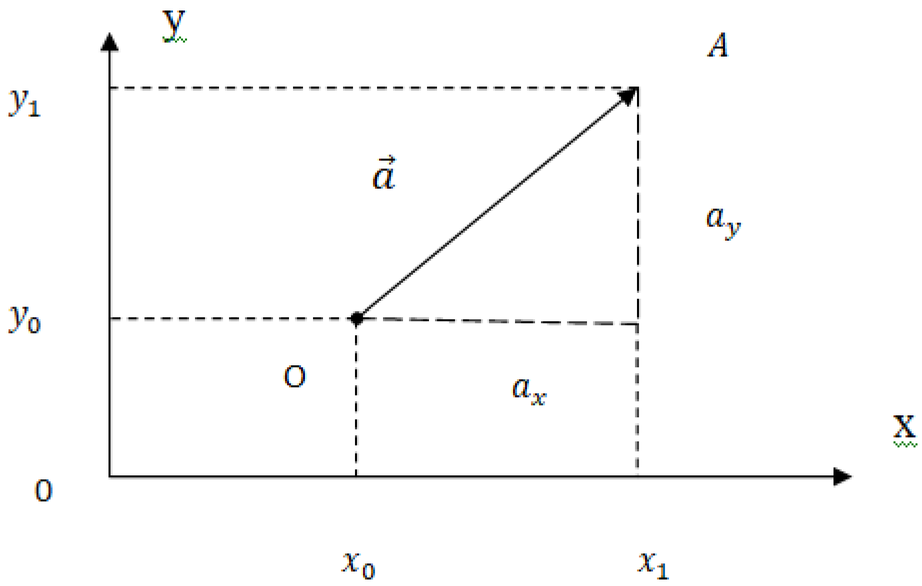
Здесь α угол между векторами.



Вторая операция, называется векторным произведением векторов. Эта операция будет введена позже.

7. Вектор в декартовой системе координат. Свойства вектора не зависят от выбора системы координат, в которой производят рассмотрение задачи. Тем не менее любую задачу и тем более физическую рассматривают в конкретной системе координат. Вектор в выбранной системе координат описывается координатами своего начала и своего конца.

Разности координат $a_x = x_1 - x_0$, $a_y = y_1 - y_0$ называются **компонентами вектора.** Пишут $\vec{a} = (a_x, a_y)$, имея в виду задание компонент вектора. Компоненты вектора можно задать только в фиксированной системе координат. В другой системе координат компоненты вектора будут другими.



8. Длина вектора находится по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

В случае трехмерного пространства длина вектора будет равна диагонали прямого параллелепипеда, ребра которого равны компонентам вектора. В этом случае длина вектора также дается теоремой Пифагора только для диагонали параллелепипеда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

9. При сложении и вычитании векторов их компоненты также складываются или вычитаются.

Формула

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$$

означает, что

$$c_i = a_i \pm b_i,$$

где индекс принимает два значения $i = x, y$ для плоскости и три значения для пространства.

10. Скалярное произведение векторов в векторной алгебре описывается формулой (приводится без вывода)

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\alpha = \sum_i a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Используя эту формулу можно легко получить выражение для косинуса угла между векторами

$$cos\alpha = \frac{\sum_i a_i b_i}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

При рассмотрении векторов на плоскости компоненты векторов со значком «z» следует положить равными нулю. Отметим, что в векторной алгебре все операции осуществляются не с координатами, а с компонентами векторов.

2. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

такой, что

1) модуль этого вектора равен площади параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перемещенные в плоскость δ и имеющие совмещенные начальные точки

$$|c| = absin\gamma, \tag{1}$$

где угол γ это угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в плоскости δ.

2) Вектор $\boldsymbol{c}$ направлен вдоль перпендикуляра к плоскости δ.

3) Выбор одного из двух направлений вдоль перпендикуляра определяется следующим правилом: для наблюдателя насаженного на кончик вектора $\boldsymbol{c}$ вращение от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ в плоскости δ должно происходить против часовой стрелки.

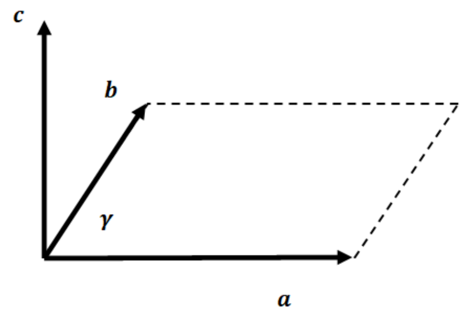


Иллюстрация к понятию векторного произведения
двух векторов $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

Определение векторного произведения, приведенное выше, позволяет развить математический аппарат по его вычислению в произвольной системе координат. Этот аппарат приводит к вычислению определителя

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Лаплас доказал теорему, при помощи которой можно вычислить любой определитель, например

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e_x}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{e_y}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{e_z}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e_x}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \boldsymbol{e_y}(a_x b_z - a_z b_x)$$

$$+ \boldsymbol{e_z}\left(a_x b_y - a_y b_x\right). \tag{3}$$

Легко убедиться, что векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю. Для этого берем $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a},$ где $\lambda -$ число и подставляем в (3). Убеждаемся, что круглые скобки обращаются в ноль.

$$\boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{a} = 0. \tag{4}$$

3. Производная

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Зададим приращение Δx значению аргумента функции x. Приращение функции между точками x и $x + \Delta x$ составит

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

На рис. 1 Δx и Δf соответствуют катетам прямоугольного треугольника, две вершины которого лежат на графике функции $y = f(x)$. Гипотенуза треугольника составляет с осью абсцисс (катетом Δx) угол $\tilde{\alpha}$. Если устремить $\Delta x \to 0$, то гипотенуза будет приближаться по своему направлению к касательной к графику функции в точке x.

Составим отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = tg\tilde{\alpha}. \qquad (1)$$

Производная равна пределу отношения (1) приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.

$$f'_x \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\alpha. \qquad (2)$$

Производная равна тангенсу угла наклона касательной к оси *Ox* в точке, где она вычисляется.

Допустим, что производная вычисляется в точке x_0. Тогда уравнение касательной может быть определено из условия

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'_x(x_0) \equiv tg\alpha. \qquad (3)$$

Решив (3) относительно y, находим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$y = f(x_0) + f'_x(x_0)(x - x_0). \qquad (4)$$

Функция, которая в каждой точке оси *Ox* имеет производную, называется **дифференцируемой**. Функция, которая не имеет скачков в значениях называется **непрерывной**. Функция, которая не имеет скачков первой производной, называется **гладкой**. Математики доказали значительное количество теорем, выясняющих отношения между непрерывными, дифференцируемыми и гладкими функциями. Мы не будем углубляться в эти вопросы.

Дифференциалы

Понятие дифференциалов связано с разложением произвольной функции в ряд Тейлора. В курсе математического анализа доказана теорема о том, что произвольная бесконечно дифференцируемая функция может быть разложена в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_x(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''_x(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \qquad (5)$$

Введем новые обозначения

$$dx = (x - x_0),$$
$$dx^2 = (x - x_0)^2 ,$$

$$\ldots$$
$$dx^n = (x - x_0)^n,$$
$$\ldots$$
$$df(x_0) = f'_x(x_0)dx,$$
$$d^2f(x_0) = f''_x(x_0)dx^2,$$
$$\ldots$$
$$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$
$$\ldots$$

Здесь объекты, которые начинаются с буквы d, называются **дифференциалами**.

Перепишем ряд Тейлора в новых обозначениях в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x_0)}{n!} + \cdots \quad (6)$$

Введение дифференциалов в эпоху гусиных перьев и чернил позволило примерно в два раза сократить объем записи при разложении функций в ряды. Никакого другого смысла дифференциалы не несут. Это просто другие обозначения членов ряда Тейлора.

Отметим, что второй член разложения позволяет выразить через дифференциалы первую производную

$$\frac{df}{dx} = f'_x. \quad (7)$$

Такое обозначение прижилось и хорошо себя зарекомендовало, особенно в физике. Дифференциалы df и dx являются независимыми математическими объектами и ими можно жонглировать так же как любыми алгебраическими параметрами. Это удобно при подготовке и проведении интегрирования. Дифференциалы высших порядков являются неудобными обозначениями и на практике используются редко.

Правила дифференцирования

Математики установили несколько правил дифференцирования, которые помогают быстро вычислять производные от различных функций. Всего таких правил пять.

Правило линейной комбинации

$$\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Производная от константы

$$(Const)' = 0.$$

Производная от произведения

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Производная от частного

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Производная от сложной функции

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f_g'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Кроме того, математики вычислили пределы (2) для полутора десятка элементарных функций и предлагают студентам выучить их наизусть.

Таблица производных

$(x^p)' = px^{p-1}$	$(sinx)' = cosx$
$(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(cosx)' = -sinx$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(tgx)' = \dfrac{1}{cos^2x}$
$(e^x)' = e^x$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{sin^2x}$
$(lnx)' = \dfrac{1}{x}$	$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x lna$	$(arccosx)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(log_a x)' = \dfrac{1}{xlna}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Другие производные можно найти в справочниках по математике или вычислить самостоятельно.

Интегрирование

Интегрирование – это операция обратная дифференцированию. Пишут

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{8}$$

Здесь значок $\int$ просто уничтожает знак дифференциала. При этом восстанавливается функция, которая стоит под знаком дифференциала. Эту функцию можно восстановить с точностью до константы, так как дифференциал от константы равен нулю.

Вычисление интеграла

$$\int f(x)dx$$

заключается в нахождении функции $F(x)$ такой, что

$$f(x)dx = dF(x).$$

Учитывая формулы для дифференциалов первого порядка

$$dF(x) = F'dx,$$

требуется найти функцию $F(x)$ такую, производная от которой равна $f(x)$. Нахождение такой функции является творческой задачей, обратной к вычислению производных. Основной прием здесь – это разбить функцию $f(x)$ на сумму нескольких более простых функций, каждая из которых является табличной производной.

Вычисление определенного интеграла связано с нахождением площади под кривой и базируется на применении формулы Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a). \quad (9)$$

Более сложной информации из математического анализа в курсе физики нам не потребуется.

Учебное издание

Боровский Андрей Викторович

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Часть 1
Механика (статика, кинематика, динамика)

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 19.02.19.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.

http://bgu.ru.